LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 21 oktober 2010 kl 14-19

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift. Preliminära betygsgränser:

Betyg 3: 12 poäng
4: 17 poäng
5: 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet anslås onsdag 3 november på institutionens anslagstavla på första våningen i Maskinhuset samt på institutionens hemsida. Visning samma dag kl 12.00–12.30 i labbet på första våningen.

Lösningar till tentamen 21 oktober 2010 kl 14-19

1. Ett system ges av

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

a. Hur många insignaler, utsignaler och tillstånd har systemet?

(1 p)

b. Är systemet linjärt?

(1 p)

Solution

a. B-matrisen har en kolumn $\rightarrow$ systemet har en insignal.
C-matrisen har en rad $\rightarrow$ systemet har en utsignal.
A-matrisen har dimensionerna $3x3$ $\rightarrow$ systemet har tre tillstånd.

b. Ja, tillståndsekvationerna innehåller inga olinjära funktioner.

2. En process beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{z} + \dot{z}\sqrt{z} + z = \sin(u)$$

där u är insignal och vi är intresserade av att mäta summan av $\dot{z}$ och z.

a. Inför lämpliga tillstånd och skriv systemet på tillståndsform. (1 p)

b. Beräkna samtliga stationära punkter och linjärisera systemet runt den punkt som svarar mot $u^0 = \frac{\pi}{4}$. (2 p)

Solution

a. Inför tillstånden $x_1 = z$ och $x_2 = \dot{z}$. Detta ger:

$$\dot{x}_1 = \dot{z} = x_2 = f_1(x_1, x_2, u)$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{z} = -\dot{z}\sqrt{z} - z + \sin(u) = -x_2\sqrt{x_1} - x_1 + \sin(u) = f_2(x_1, x_2, u)$$
$$y = z + \dot{z} = x_1 + x_2 = g(x_1, x_2, u)$$

b. Vid en stationär punkt gäller att:

$$\dot{x}_1 = 0 = x_2^0$$
$$\dot{x}_2 = 0 = -x_2^0\sqrt{x_1^0} - x_1^0 + \sin(u^0)$$

De stationära punkterna ges således av $(\sin(t), 0, t)$

Den stationära punkten med $u^0 = \frac{\pi}{4}$ ges av

$$x_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2^0 = 0, \quad u^0 = \frac{\pi}{4}$$

Taylorutveckla f och g runt (x_1^0, x_2^0, u^0). Behåll bara första ordningens termer.
Med de nya variablerna

$$\Delta x = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta u = u - u^0$$

$$\Delta y = y - y^0$$

fås det linjäriserade systemet

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y &= C \Delta x \end{aligned}$$

där:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\Bigg|_{x^0,\ u^0} \\ B &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix}\Bigg|_{x^0,\ u^0} \\ C &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}\Big|_{x^0,\ u^0} \end{aligned}$$

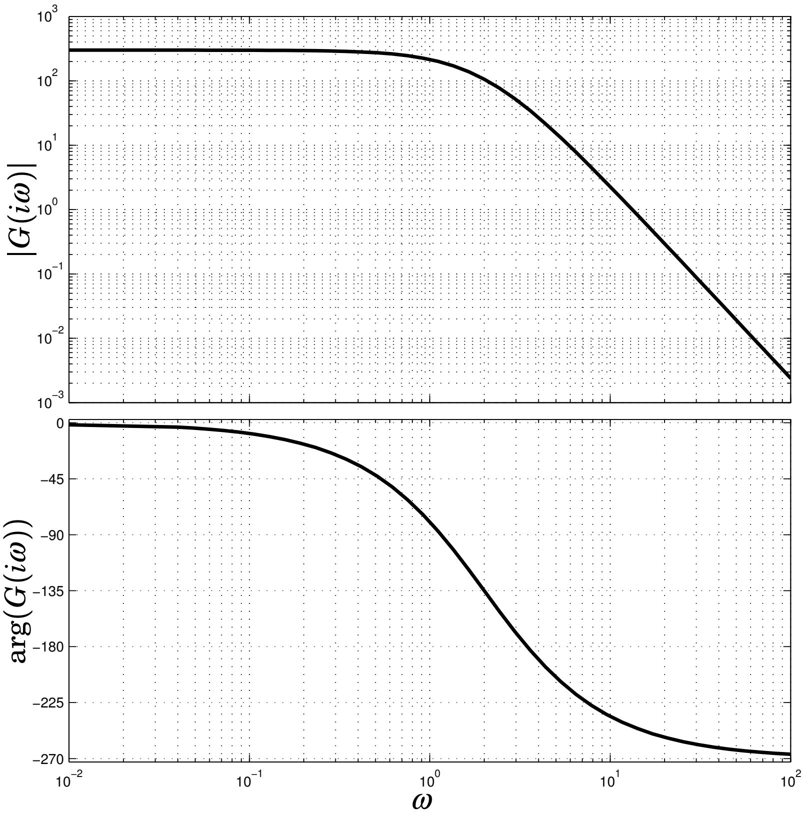
Med $x_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, x_2^0 = 0, u^0 = \frac{\pi}{4}$ fås:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Ett Bodediagram för en stabil process utan nollställen visas i figur 1.

a. Hur många poler har processen?

(1 p)



Figur 1 Bodediagram för processen i uppgift 3

b. Skissa Nyquistkurvan för processen. Beskriv hur du gör. (1 p)

c. Processen regleras med en P-regulator. Hur hög får regulatorns förstärkning vara för att det slutna systemet ska få minst 45° fasmarginal? (1 p)

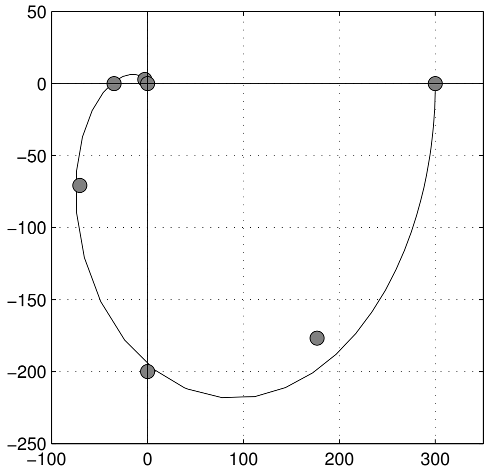
Solution

a. Fasen går mot $-270°$ när $\omega \to \infty$. Eftersom processen inte har några nollställen innebär det att systemet har tre poler.

b. Fasen ligger i intervallet $-270° < \phi < 0$, och Nyquistkurvan ligger därmed i andra, tredje och fjärde kvadranten. Från Bodediagrammet kan vi (på ett ungefär) läsa av amplituden för några olika värden på fasen, och från detta skissa Nyquistkurvan

Fas	Amplitud
$0°$	300
$-45°$	250
$-90°$	200
$-135°$	100
$-180°$	35
$-225°$	4
$-270°$	$\to 0$

I figur 2 visas den riktiga Nyquistkurvan, tillsammans med värdena ur tabellen. Vi ser att vi kan skissa Nyquistkurvan ganska väl genom att läsa av några värden ur Bodediagrammet.



Figur 2

c. Överföringsfunktionen för P-regulatorn är $G_R(s) = K$. För kretsöverföringsfunktionen $G_0(s)$ gäller då

$$\begin{aligned} G_0(s) &= G_P(s)G_R(s) = KG_P(s) \\ |G_0(i\omega) &= K|G_P(i\omega)| \\ \arg G_0(i\omega) &= \arg G_P(i\omega) + \arg K = \arg G_P(i\omega) \end{aligned}$$

P-regulatorn påverkar alltså inte fasen för kretsöverföringsfunktionen $G_0(s)$.
För att systemet ska ha 45° fasmarginal gäller då att

$$\arg G_0(i\omega_c) = \arg G_P(i\omega_c) = -180° + 45° = -135°$$

Ur faskurvan för processen kan vi läsa ut att skärfrekvensen måste vara $\omega_c = 2$.

Vid skärfrekvensen gäller

$$
\begin{aligned}
|G_0(i\omega_c)| &= K|G_P(i\omega_c)| = 1 \\
|G_P(i\omega_c)| &= |G_P(2i)| \approx 100 \\
|G_0(i\omega_c)| &= 100K = 1 \\
K &= 0.01
\end{aligned}
$$

Om systemet regleras med en P-regulator måste $K < 0.01$ för att det slutna systemet ska få minst 45° fasmarginal.

4. Betrakta systemet

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\
y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x
\end{aligned}
$$

a. Beräkna systemets poler och nollställen. (2 p)

b. Inför tillståndsåterkopplingen $u = -Lx + l_r r$, med $L = \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}$ och $l_r = 1$. Beräkna poler och nollställen för det slutna systemet. (2 p)

Solution

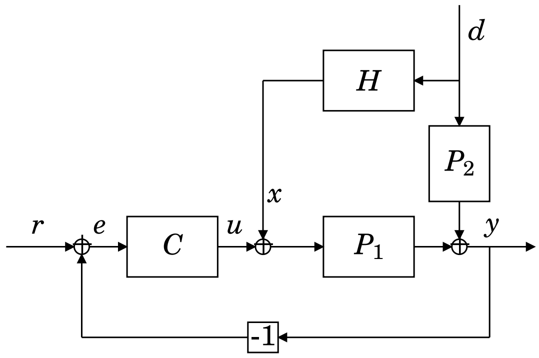
a. Överföringsfunktionen är

$$
\begin{aligned}
G(s) = C(sI - A)^{-1}B &= \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{s+4}{(s+2)(s+3)}
\end{aligned}
$$

Poler i $s = -2$ och $s = -3$. Nollställe i $s = -4$.

b. $u = 2x_2 + r \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
G_{cl}(s) = C(sI - (A - BL))^{-1}Bl_r &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 & -3 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+2)(s+1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 3 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{s+4}{(s+2)(s+1)}
\end{aligned}
$$



Figur 3 Regulatorstruktur i uppgift 5.

5. En process P_1 regleras med en välinställd regulator C. En mätbar störning d påverkar systemet 0.1 sekunder efter det att man kunnat mäta denna. Man vill minska inverkan av störningen genom att introducera ett block H. Se blockschema i figur 3.

a. Beräkna överföringsfunktionen från d till y. (1 p)

b. Vad kallas tekniken att addera en signal x till u för att underlätta störningsundertryckningen? (1 p)

c. Processen P_1 kan beskrivas med ett stabilt första ordningens system med ett nollställe i vänster halvplan, och P_2 är en tidsfördröjning med 0.1 sekunder.

$$P_1 = \frac{s+4}{s+7}, \qquad P_2 = e^{-0.1s} \tag{1}$$

Designa H så att störningen d inte får någon påverkan på utsignalen y. (1 p)

d. Det visar sig att den ingenjör som modellerat processen P_1 har gjort ett dåligt jobb. Efter nya insatser visar det sig att P_1 bättre beskrivs av

$$P_1 = \frac{s-4}{s+7}e^{-0.2s} \tag{2}$$

Ange två anledningar till varför strukturen hos P_1 gör att det inte går att designa H så att störningen d inte får någon påverkan på y. (1 p)

Solution

a.

$$G_{yd}(s) = \frac{P_2(s) + P_1(s)H(s)}{1 + P_1(s)C(s)} \tag{3}$$

b. Framkoppling.

c. För att helt undertrycka störningen d krävs att täljaren i (3) är noll.

$$P_2 + P_1 H = 0, \quad \text{dvs att} \quad H = -P_1^{-1}P_2 \tag{4}$$

Således skall framkopplingsblocket väljas som

$$H = -\frac{s+7}{s+4}e^{-0.1s}.$$

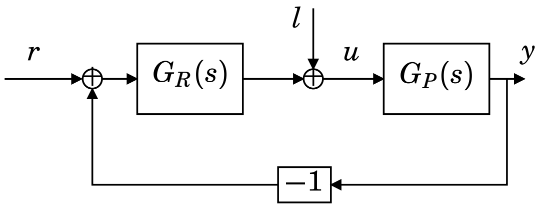
d. För att helt undertrycka störningens inverkan på utsignalen måste framkopplingen väljas som

$$H = -\frac{s+7}{s-4}e^{0.1s}$$

H blir således instalbil pga. polen i $s = 4$ vilket gör den olämplig. H innehåller dessutom en negativ tidsfördröjning och är således omöjlig att realisera.

6. Du får jobb som regleringenjör i fordonsindustrin. Ditt jobb är att förbättra regleringen av en trottel som styr luftflödet till motorn. Trotteln vrids med en elmotor, och överföringsfunktionen från motorns spänning u till trottelns vinkelposition y är

$$G_P(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$



Figur 4

En regulator används för att styra trottelns vinkelposition enligt figur 4. Din kollega har designat en regulator med överföringsfunktionen

$$G_R(s) = 1$$

men han tycker inte att regleringen blev tillräckligt bra.

a. Vad kallas den typ av regulator som din kollega har designat?

(1 p)

b. Din chef ger dig en lista på specifikationer som en ny regulator måste uppfylla:

1. Det slutna systemet ska vara stabilt.
2. Stegändringar i referensvärdet ska följas utan stationärt fel.
3. Stegändringar i laststörningen l ska inte ge något stationärt fel.
4. Stegsvaret från r till y får inte svänga.
5. Stegsvaret från r till y ska ha nått 63% av slutvärdet inom 0.5 s.

Vilka av specifikationerna uppfyller regulatorn som din kollega har designat? Motivera dina svar. (2 p)

c. Designa en regulator som uppfyller alla specifikationerna. Du måste motivera hur du tänker när du räknar fram din regulator, men du behöver inte explicit bevisa att den uppfyller specifikationerna.

(2 p)

Solution

a. P-regulator

b.

1. Det slutna systemets överföringsfunktion från r till y blir

$$G_{ry}(s) = \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Det slutna systemets poler ges av

$$s^2 + 2s + 1 = 0$$
$$s = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$$

Båda polerna ligger i $s = -1$, dvs i vänster halvplan och det slutna systemet är därmed stabilt.

2. Eftersom processen innehåller en integrator kommer stegändringar i referensvärdet att kunna följas utan stationärt fel. Vi kan se detta på att $G_{ry}(0) = 1$.
3. Eftersom regulatorn inte innehåller någon integrator kommer stegändringar i laststörningen ge upphov till ett stationärt fel.
4. Eftersom polerna för G_{ry} är reella kommer stegsvaret från r till y inte att svänga.
5. För ett första ordningens stabilt system anger tidskonstanten den tid det tar för stegsvaret att nå 63% av maxvärdet. Tidskonstanten ges av $T = 1/|\text{polen}|$. Här har vi ett andra ordningens system med två tidskonstanter som båda är långsammare än vad specifikationerna på stegsvaret kräver. Därmed kan specifikationen inte uppfyllas

Slutsats: Kollegans regulator uppfyller specifikationerna 1, 2 och 4.

c. För att uppfylla specifikation nummer 3 krävs att det finns en integrator i regulatorn. Det slutna systemet får då (minst) tre poler. För att kunna placera dessa poler där vi vill ha dem och uppfylla alla specifikationerna räcker det inte med en PI-regulator som bara har två parametrar. Vi väljer därför att styra processen med en PID-regulator. Vi har då

$$G_R(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d)$$

Slutna systemets överföringsfunktion från r till y:

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+2)}K(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d)}{1 + \frac{1}{s(s+2)}K(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d)} \\ &= \frac{K(T_d s^2 + s + 1/T_i)}{s^3 + (2 + KT_d)s^2 + Ks + K/T_i} \end{aligned}$$

karakteristiskt polynom

$$s^3 + (2 + KT_d)s^2 + Ks + K/T_i$$

För att få ett stabilt stegsvar som inte svänger vill vi placera de tre polerna på negativa reella axeln. För enkelhets skull kan vi lägga dem på samma ställe. Polernas läge bestämmer hur snabbt det slutna systemet blir, vi vill att stegsvaret ska nått 63% av slutvärdet på 0.5 s. För ett första ordningens system hade det inneburit att polen kunde placeras i $s = -1/0.5 = -2$. Eftersom vi har ett tredje ordningens system måste polerna göras snabbare för att kombinationen av de tre polerna ska ge ett tillräckligt snabbt stegsvar. Vi kan t.ex. lägga polerna i $s = 3 \cdot -2 = -6$. Vi får då det önskade karakteristiska polynomet

$$(s + 6)^3 = s^3 + 18s^2 + 108s + 216$$

Vi jämför koefficienter i polynomen och får

$$\begin{aligned} 2KT_d &= 18 \\ K &= 108 \\ \frac{K}{T_i} &= 216 \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} K &= 108 \\ T_i &= 0.5 \\ T_d &= 0.0833 \end{aligned}$$

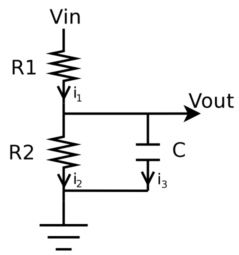
Regulatorns överföringsfunktion blir då

$$G_R(s) = 108 \left(1 + \frac{2}{s} + 0.0833s\right)$$

Eftersom vi har lagt polerna på negativa reella axeln kan vi direkt se att specifikationerna 1 och 4 är uppfyllda. Eftersom regulatorn innehåller en integrator kan vi dra slutsatsen att specifikationerna 2 och 3 är uppfyllda. För att säkert säga att specifikation 5 är uppfylld måste vi titta på inverkan av det slutna systemets nollställen, men det leder till ganska krångliga räkningar. Innan regulatorn används är det därför lämpligt att utvärdera regleringen genom att simulera stegsvaret i t.ex. Matlab.

7. Tove Teknolog vill mäta en spänning från sin mikroprocessor. Spänningen är genererad via sk. pulsbreddsmodulering och innehåller därför en hel del högfrekventa störningar. Tove som kan sin teori för samplade system vet att eftersom signalen samplas i 50 Hz (= 314 rad/s) måste alla signaler med frekvensinnehåll över 25 Hz filtreras bort. För att vara på den säkra sidan är det lämpligt att designa ett filter med en brytfrekvens 8-10 gånger lägre än samplingsfrekvensen.

Tove vet även att inspänningen v_{in} alltid ligger i intervalet 0-12 V. Men eftersom ingången på microprocessorn endast klarar signaler i intervallet



Figur 5 Kretsschema för Toves kombinerade lågpass-filter och spänningsdelare

0-5 V måste även insignalens amplitud dämpas, så att v_{ut} ligger mellan 0-5 V.

För att göra detta designar Tove därför en enkel krets enligt figur 5. Kretsen beskrivs av ekvationssystemet (5).

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ R_2 i_2 = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_3 dt \\ v_{in} = R_1 i_1 + R_2 i_2 \\ v_{ut} = R_2 i_2 \end{cases} \tag{5}$$

a. Använd ekvationssystemet för att beräkna en överföringsfunktion $G(s)$ från V_{in} till V_{ut}. (2 p)

b. Välj värden på R_1, R_2 samt C så att filtret får en lämplig brytfrekvens och utsignalnivå. (2 p)

Solution

a.

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ R_2 i_2 = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_3 dt \\ v_{in} = R_1 i_1 + R_2 i_2 \\ v_{ut} = R_2 i_2 \end{cases}$$

Laplacetransformera:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ R_2 I_2 = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{s} I_3\right) \\ V_{in} = R_1 I_1 + R_2 I_2 \\ V_{ut} = R_2 I_2 \end{cases}$$

Lös ut I_3 från den andra ekvationen och I_2 från den sista.

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_3 = C R_2 s I_2 \\ V_{in} = R_1 I_1 + R_2 I_2 \\ I_2 = \frac{1}{R_2} V_{ut} \end{cases}$$

Sätt in uttrycken för I_2 och I_3 i den första ekvationen. Sedan sedan in detta och uttrycket för I_2 i den tredje.

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{R_2}V_{ut} + CR_2sI_2 = \frac{1}{R_2}V_{ut} + CR_2s\frac{1}{R_2}V_{ut} = \left(\frac{1}{R_2} + Cs\right)V_{ut} \\ I_3 = CR_2sI_2 \\ V_{in} = R_1\left(\frac{1}{R_2} + Cs\right)V_{ut} + R_2\frac{1}{R_2}V_{ut} = \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 + R_1Cs\right)V_{ut} \\ I_2 = \frac{1}{R_2}V_{ut} \end{cases}$$

Lös nu ut V_{ut} ur den tredje ekvationen och manipulera uttrycket lite och erhåll:

$$V_{ut} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + sCR_1 + 1}V_{in} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\frac{1}{1 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}Cs}V_{in}$$

b. R_1, R_2 samt C kan väljas godtyckliga så länge förstärkningen och brytfrekvensen blir lämpliga. Dock kan det rent praktiskt vara lämpligt att välja resistorer sådana att de finns allmänt tillgängliga att köpa. Högre värden på resistansen ger även lägre läckström i kretsen.

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \leq \frac{5}{12} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 22k\Omega \\ R_2 = 10k\Omega \end{cases}$$

Vi vill välja en brytfrekvens ungefär 10 gånger långsammare än samplingsfrekvensen, dvs ungefär 5 Hz.

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}\frac{1}{C} \leq 5 \cdot 2\pi \Rightarrow C \geq \frac{1}{10\pi}\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2} = 4.63\mu F$$

Vi väljer därmed $C = 4.7\mu F$ då det är en allmänt tillgänglig kapacitans.