

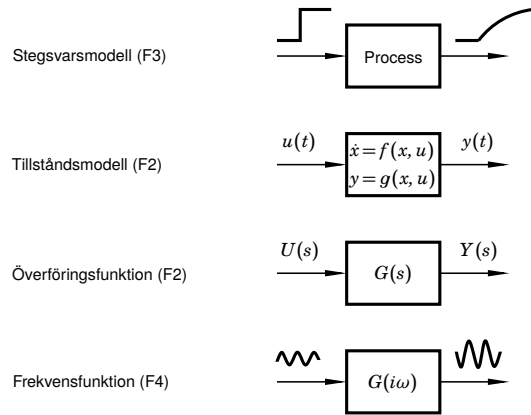
Reglerteknik AK – F4

Frekvensanalys

- ▶ Frekvenssvar
- ▶ Bodediagram och Nyquistdiagram
- ▶ Samband mellan systemmodeller

1/41

Processmodeller i kursen



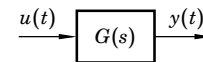
2/41

Frekvensanalys

- ▶ Studera hur systemet reagerar på signaler med olika frekvenser
- ▶ Exempel:
 - ▶ Laststörningar – mest låga frekvenser
 - ▶ Mätbrus – mest höga frekvenser
- ▶ För linjära system kan varje frekvens studeras separat
 - ▶ Sinus in \Rightarrow sinus ut (till slut)
 - ▶ Kan användas för att experimentellt härleda överföringsfunktioner

3/41

Frekvenssvar



$$u(t) = \sin \omega t$$

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = |G(i\omega)|$$

$$\varphi = \arg G(i\omega)$$

- ▶ ω : frekvens [rad/s]
- ▶ $G(i\omega)$: frekvensfunktion
- ▶ $|G(i\omega)|$: amplitud(funktion), förstärkning, magnitud
- ▶ $\arg G(i\omega)$: fas(funktion), fasförskjutning

4/41

Härledning av frekvenssvar

Härledningen använder sig av:

- Från förra föreläsningen (där $h(t)$ är impulssvar/viktfunktion):

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \iff G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

- ger med Laplacetransform 6. för $Y(s) = G(s)U(s)$ att

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \stackrel{[\tau=t-\tau']}{=} \int_t^0 h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (\text{faltning})$$

- Sinus kan skrivas som $\sin \omega t = \text{Im } e^{i\omega t}$ då:

$$e^{i\omega t} := \cos \omega t + i \sin \omega t$$

- Komplexa tal z kan skrivas som $z = |z|e^{i \arg z}$

5/41

Härledning av frekvenssvar

$$y(t) \stackrel{2}{=} \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau) \sin \omega(t-\tau)d\tau$$

$$\stackrel{3}{=} \text{Im} \int_0^t h(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau = \text{Im} \int_0^t h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau e^{i\omega t}$$

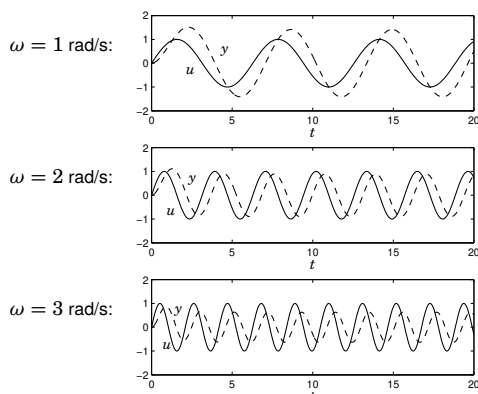
$$= [t \rightarrow \infty] \stackrel{1}{=} \text{Im } G(i\omega)e^{i\omega t} \stackrel{4}{=} \text{Im} |G(i\omega)|e^{i \arg(G(i\omega))} e^{i\omega t}$$

$$= \text{Im} |G(i\omega)|e^{i(\omega t + \arg(G(i\omega)))}$$

$$\stackrel{3}{=} |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg(G(i\omega)))$$

6/41

Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$



7/41

Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$

$$G(i\omega) = \frac{2}{i\omega + 1}$$

$$|G(i\omega)| = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\arg G(i\omega) = -\arctan \omega$$

ω	$ G(i\omega) $	$\arg G(i\omega)$
0	2	0°
1	$\sqrt{2}$	-45°
∞	0	-90°

8/41

Bodediagram

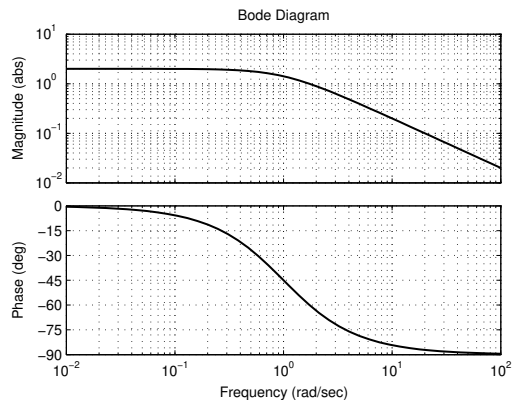
Rita $|G(i\omega)|$ och $\arg G(i\omega)$ som funktioner av ω

- ▶ Amplitudkurvan $|G(i\omega)|$ ritas i log-log-skala
- ▶ Faskurvan $\arg G(i\omega)$ ritas i log-lin-skala

(MATLAB-kommando: bode)

9/41

Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$



10/41

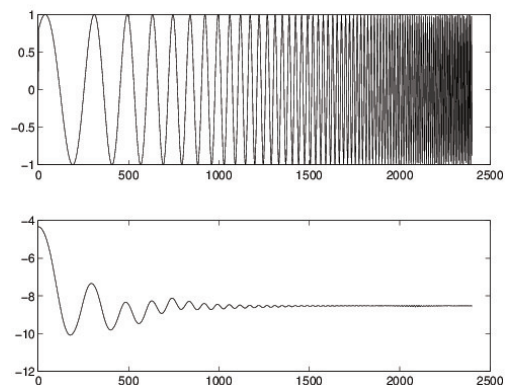
Miniproblem

Avläs i Bodediagrammet:

- ▶ Hur mycket förstärks och fäsförskjuts insignaler med frekvensen 0.5 rad/s?
- ▶ Hur mycket förstärks och fäsförskjuts insignaler med frekvensen 5 rad/s?

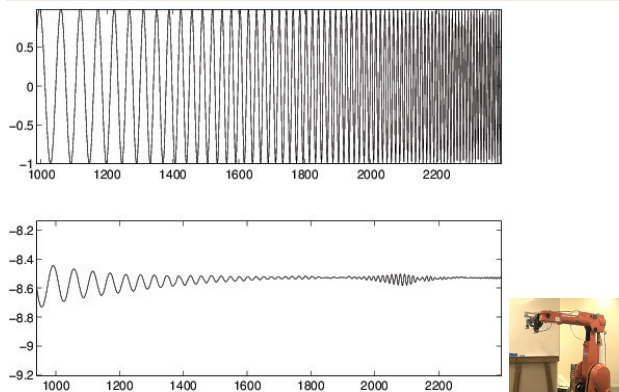
11/41

Sinus in–sinus ut: Exempel med frekvenssvep (chirp)



12/41

Sinus in–sinus ut: Exempel med frekvenssvep (chirp)



Resonance frequency of industrial robot IRB2000 visible in data.

13/41

Att skissa/tolka Bodediagram

Antag $G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) \dots$

Då

$$\log |G(i\omega)| = \log |G_1(i\omega)| + \log |G_2(i\omega)| + \log |G_3(i\omega)| + \dots$$

$$\arg G(i\omega) = \arg G_1(i\omega) + \arg G_2(i\omega) + \arg G_3(i\omega) + \dots$$

- ▶ Bidragen från G_1, G_2, G_3, \dots adderas i både amplitud- och fasdiagrammet

14/41

Bodediagram för $G(s) = K$

Överföringsfunktion utvärderad på imaginära axeln:

$$G(i\omega) = K$$

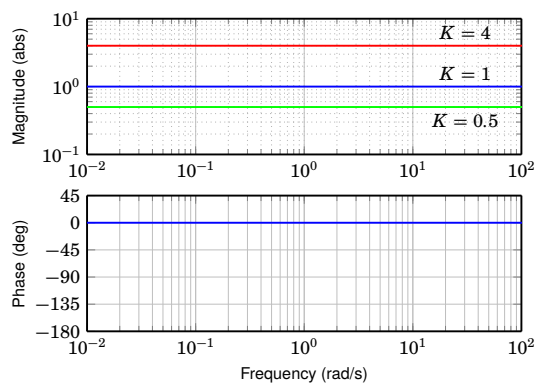
då är:

$$\log |G(i\omega)| = \log(|K|)$$

$$\arg G(i\omega) = 0 \quad (\text{om } K > 0 \text{ annars } +180^\circ \text{ eller } -180^\circ)$$

15/41

Bodediagram för $G(s) = K$



16/41

Bodediagram för $G(s) = s^n$

Överföringsfunktion utvärderad på imaginära axeln:

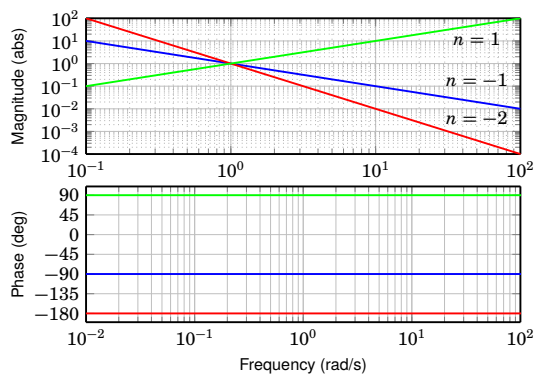
$$G(i\omega) = (i\omega)^n$$

då är (för $\omega > 0$):

$$\begin{aligned} \log |G(i\omega)| &= n \log |i\omega| = n \log(\omega) \\ \arg G(i\omega) &= n \arg(i\omega) = n \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

17/41

Bodediagram för $G(s) = s^n$



18/41

Bodediagram för $G(s) = (1 + sT)^n$

Överföringsfunktion utvärderad på imaginära axeln:

$$G(i\omega) = (1 + i\omega T)^n$$

då är:

$$\begin{aligned} \log |G(i\omega)| &= n |1 + i\omega T| = n \log(\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) \\ \arg G(i\omega) &= n \arg(1 + i\omega T) = n \arctan(\omega T) \end{aligned}$$

För små ω :

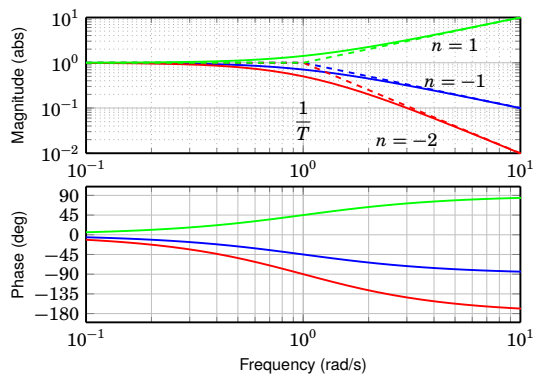
$$\begin{aligned} \log |G(i\omega)| &\rightarrow 0 \\ \arg G(i\omega) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

För stora ω :

$$\begin{aligned} \log |G(i\omega)| &\rightarrow n \log(\omega T) \\ \arg G(i\omega) &\rightarrow n \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

19/41

Bodediagram för $G(s) = (1 + sT)^n$



20/41

Bodediagram för $G(s) = (1 + 2\zeta s/\omega_0 + (s/\omega_0)^2)^n$

Överföringsfunktion utvärderad på imaginära axeln:

$$G(i\omega) = (1 + 2\zeta i\omega/\omega_0 + (i\omega/\omega_0)^2)^n = (1 - (\omega/\omega_0)^2 + i2\zeta\omega/\omega_0)^n$$

då är

$$\begin{aligned} \log |G(i\omega)| &= n \log \left(\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_0)^2} \right) \\ \arg G(i\omega) &= n \arg(1 - (\omega/\omega_0)^2 + i2\zeta\omega/\omega_0) \end{aligned}$$

För små ω :

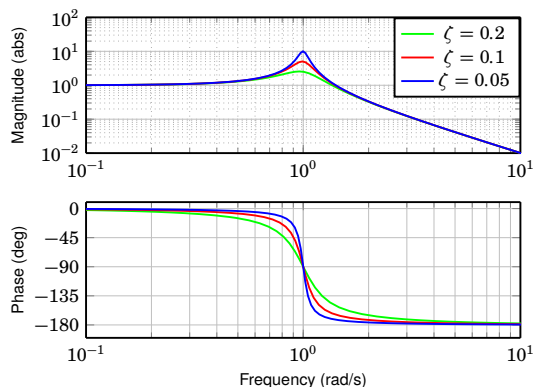
$$\begin{aligned} \log |G(i\omega)| &\rightarrow 0 \\ \arg G(i\omega) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

För stora ω :

$$\begin{aligned} \log |G(i\omega)| &\rightarrow 2n \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \\ \arg G(i\omega) &\rightarrow n\pi \end{aligned}$$

21/41

Bodediagram för $G(s) = (1 + 2\zeta s/\omega_0 + (s/\omega_0)^2)^n$



22/41

Miniproblem

Vad är n på förra bilden?

23/41

Exempel

Pendel

24/41

Bodediagram för $G(s) = e^{-sL}$

Överföringsfunktion utvärderad på imaginära axeln:

$$G(s) = e^{-sL}$$

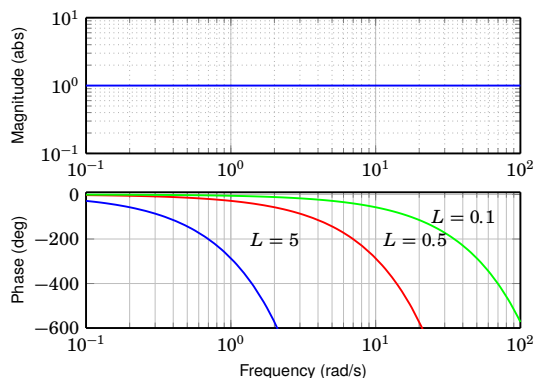
Beskriver tidsfördröjning med fördröjning L , alltså $y(t) = u(t - L)$

$$\log |G(i\omega)| = 0$$

$$\arg G(i\omega) = -\omega L$$

25/41

Bodediagram för $G(s) = e^{-sL}$



26/41

Snabbregler för att skissa/tolka Bodediagram

$G(s)$	brytfrekvens	amplitudkurvas	faskurva
K	-	flyttas i höjded	-
s^n	"0"	bryts med n	ändras med $n90^\circ$
$(1 + sT)^n$	$1/T$	bryts med n	ändras med $n90^\circ$
$(1 + \frac{2\zeta s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2})^n$	ω_0	peak vid ω_0	ändras med $n180^\circ$
$e^{-sL}, L > 0$	-	-	exp. minskning (i lin-log)

27/41

Bodediagram för sammansatt överföringsfunktion

Rita Bodediagram för överföringsfunktionen:

$$G(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+20)^2}$$

1. Skriv som produkt av enkla överföringsfunktioner:

$$G(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+20)^2} = 0.5 \cdot s^{-1} \cdot (1+0.5s) \cdot (1+0.05s)^{-2}$$

se till (om möjligt) att de går mot 1 då $s \rightarrow 0$

2. Bestäm frekvensbrytpunkterna:

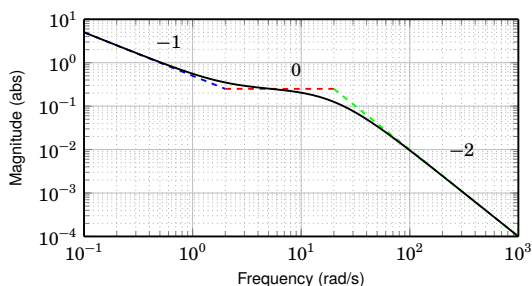
$$G(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+20)^2} = 0.5 \cdot s^{-1} \cdot \overbrace{(1+0.5s)}^{w_{c1}=2} \cdot \overbrace{(1+0.05s)^{-2}}^{w_{c2}=20}$$

och sortera från låga till höga frekvensbrytpunkter

28/41

Bodediagram för sammansatt överföringsfunktion

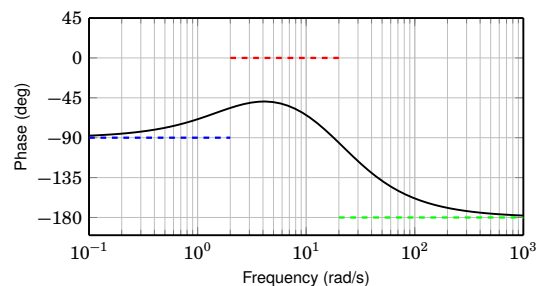
$$G(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+20)^2} = 0.5 \cdot s^{-1} \cdot \overbrace{(1+0.5s)}^{w_{c1}=2} \cdot \overbrace{(1+0.05s)^{-2}}^{w_{c2}=20}$$



29/41

Bodediagram för sammansatt överföringsfunktion

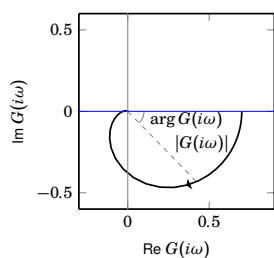
$$G(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+20)^2} = 0.5 \cdot s^{-1} \cdot \overbrace{(1+0.5s)}^{w_{c1}=2} \cdot \overbrace{(1+0.05s)^{-2}}^{w_{c2}=20}$$



30/41

Nyquistdiagram

Rita kurvan $G(i\omega)$ i komplexa talet då ω går från 0 till ∞



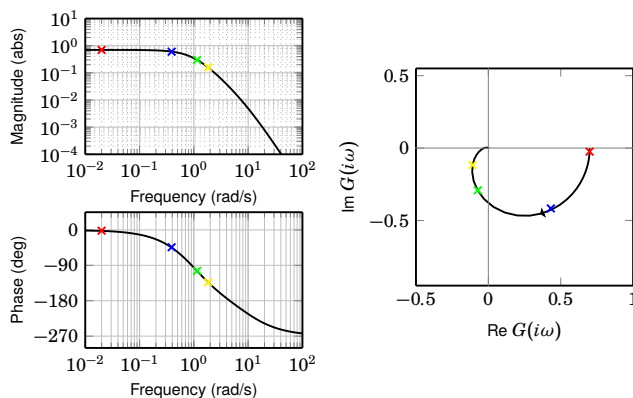
Dela upp överföringsfunktion i reell och imaginär del:

$$G(s) = \frac{1}{1+s} \quad G(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1}{1+\omega^2} - i \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

Är detta överföringsfunktionen ovan?

31/41

Från Bodediagram till Nyquistdiagram



32/41

Miniproblem

Kan samma information utläsas från Nyquistdiagram och Bodediagram?

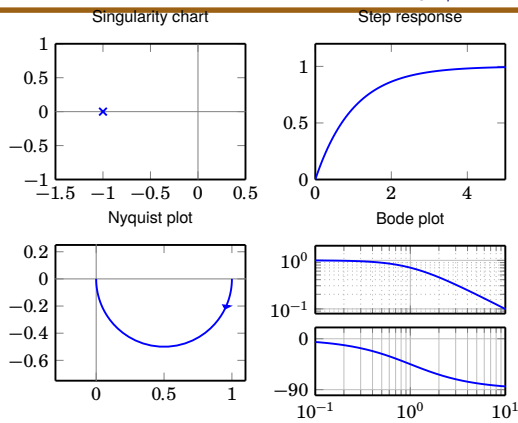
33/41

Samband mellan systemmodeller

34/41

Första ordningens system

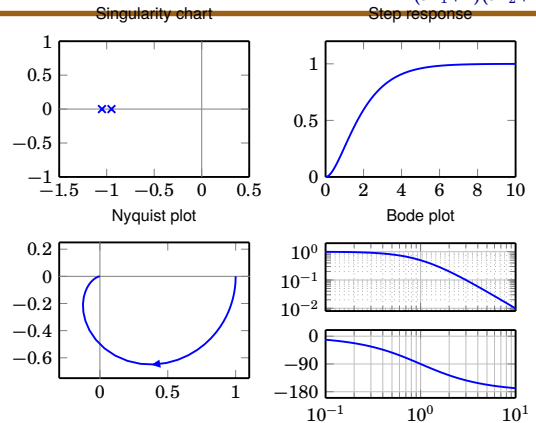
$$\frac{K}{sT+1}$$



35/41

Andra ordningens reella system

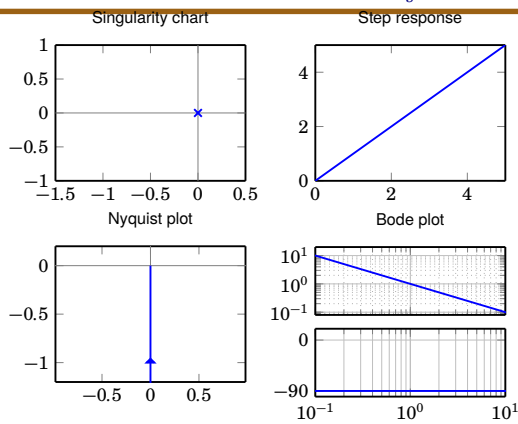
$$\frac{K}{(sT_1+1)(sT_2+1)}$$



36/41

Integrerande system

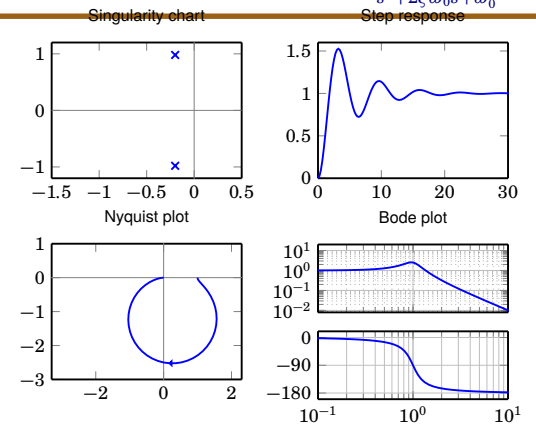
$$\frac{K}{s}$$



37/41

Andra ordningens komplexa system

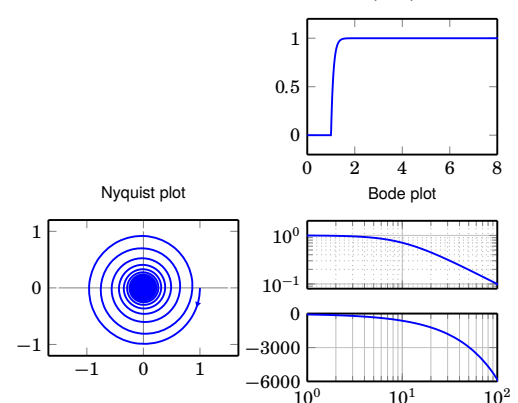
$$\frac{K\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0s+\omega_0^2}, 0 < \zeta < 1$$



38/41

System med tidsfördröjningar

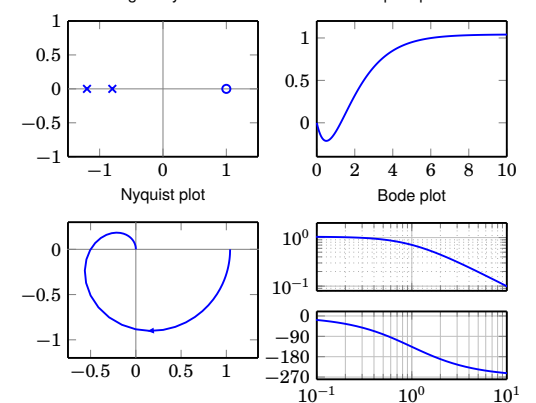
$$\frac{K}{sT+1}e^{-sL}$$



39/41

System med omvänt svar

$$\frac{1-sa}{(sT_1+1)(sT_2+1)}$$



40/41

Samband kan visualiseras med "Interactive learning modules" från
<https://arm.ual.es/ilm/>
som används på datorövningen