

Reglerteknik AK – F6

- ▶ Nyquistskriteriet (stabilitet)
- ▶ Stabilitetsmarginaler
 - ▶ Amplitud- och fasmarginal

Läsanvisning: Kapitel 6

Förre föreläsningen

1. Stabilitet
2. Rotort
3. Koefficient-villkor (Routh-Hurwitz)

Repetition frekvensanalys

Studera hur system reagerar på signaler i olika frekvensområden

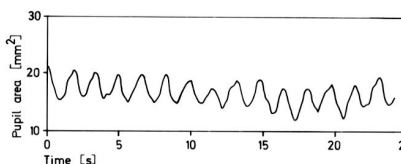
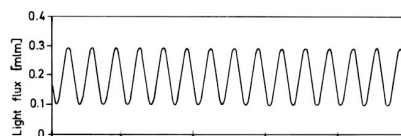
Exempel:

- ▶ Laststörningar – mest låga frekvenser
- ▶ Mätbrus – höga frekvenser

Om systemet är linjärt så kan man studera svaret för varje frekvens separat

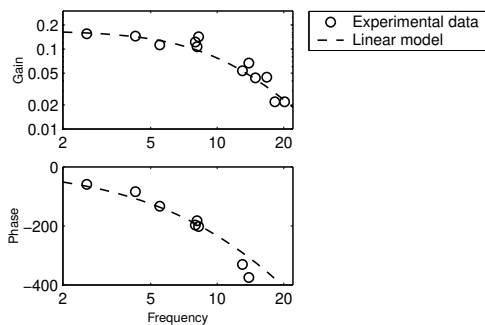
- ▶ Sinus in \Rightarrow sinus ut
- ▶ Kan t.ex. användas för att ta fram överföringsfunktioner experimentellt (systemidentifiering)

Exempel: experiment på ögats pupill



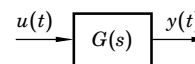
[L. Stark, 1959]

Upprepade experiment för olika frekvenser:



Linjär modell $G(s) = \frac{0.17}{(1+0.08s)^3} e^{-0.2s}$ anpassad till data

Frekvenssvar



$$u(t) = \sin \omega t$$

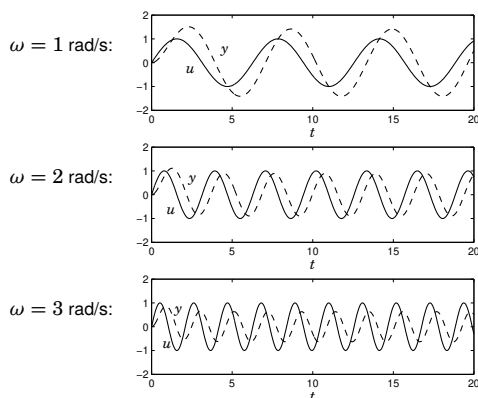
$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = |G(i\omega)|$$

$$\varphi = \arg G(i\omega)$$

- ▶ ω : frekvens [rad/s]
- ▶ $G(i\omega)$: frekvensfunktion
- ▶ $|G(i\omega)|$: amplitud(funktion), förstärkning, magnitud
- ▶ $\arg G(i\omega)$: fas(funktion), fäsförskjutning

Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$



Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$

$$G(i\omega) = \frac{2}{i\omega + 1}$$

$$|G(i\omega)| = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\arg G(i\omega) = -\arctan \omega$$

ω	$ G(i\omega) $	$\arg G(i\omega)$
0	2	0°
1	$\sqrt{2}$	-45°
∞	0	-90°

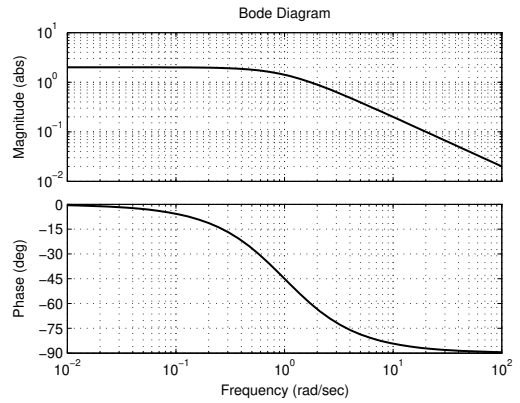
Bodediagram

Rita $|G(i\omega)|$ och $\arg G(i\omega)$ som funktioner av ω

- ▶ Amplitudkurvan $|G(i\omega)|$ ritas i log-log-skala
- ▶ Faskurvan $\arg G(i\omega)$ ritas i log-lin-skala

(MATLAB-kommando: bode)

Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$



Att skissa/tolka Bodediagram

Antag $G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)\dots$

Då

$$\log |G(i\omega)| = \log |G_1(i\omega)| + \log |G_2(i\omega)| + \log |G_3(i\omega)| + \dots$$

$$\arg G(i\omega) = \arg G_1(i\omega) + \arg G_2(i\omega) + \arg G_3(i\omega) + \dots$$

- ▶ Bidragen från G_1, G_2, G_3, \dots adderas i både amplitud- och fasediagrammet

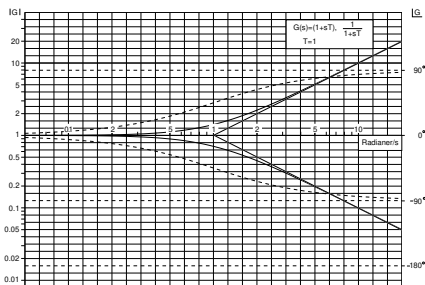
Typsystem i formelsamlingen

$$\frac{1}{1+sT}, \quad 1+sT \quad \text{reell pol, reellt nollställe}$$

$$e^{-sL} \quad \text{dödtid}$$

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \quad \text{komplex polpar}$$

Bodediagram för reell pol eller reellt nollställe



- ▶ En pol i $s = -\frac{1}{T}$ böjer ner amplitudkurvan och sänker faskurvan med 90° kring $\omega = \frac{1}{T}$; omvänt för ett nollställe

Bodediagram för dödtid

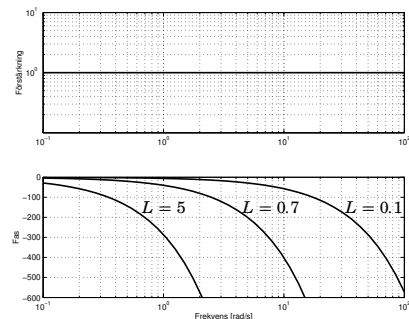
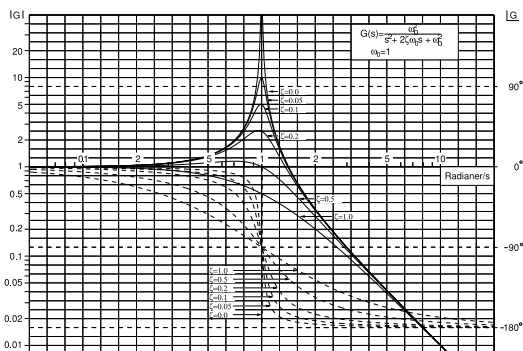


Figure: Bodediagram för $G_o(s) = e^{-sL}$ för $L = 5, 0.7$ och 0.1 sekunder.

- ▶ $\arg\{G(i\omega)\} = \arg\{e^{-i\omega L}\} = -\omega L$: En dödtid sänker faskurvan men påverkar inte amplitudkurvan (OBS! Log-skala på frekvens-axel)

Bodediagram för komplexa poler

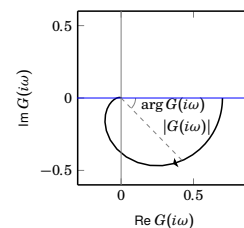


- ▶ Komplexa poler med liten dämpning ζ har en stor resonansstopp vid egenfrekvensen ω_0 i amplitudkurvan

Nyquistdiagram

- ▶ Rita kurvan $G(i\omega)$ i komplexa talplanet då ω går från 0 till ∞ .
- ▶ Dela upp överföringsfunktion i reell och imaginär del!

Princip-figur:

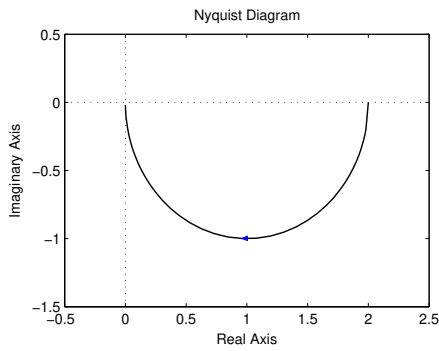


Exempel:

$$G(s) = \frac{2}{1+s}, \quad G(i\omega) = \frac{2}{1+i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2} - i \frac{2\omega}{1+\omega^2}$$

Varför är detta inte överföringsfunktionen i figuren ovan?

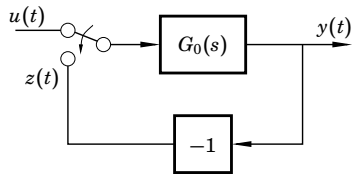
Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$



F6

- ▶ Nyquistskriteriet (stabilitet)
- ▶ Stabilitetsmarginaler
 - ▶ Amplitud- och fasmarginal

Stabilitet för återkopplade system



Antag att öppna systemet $G_0(s) = G_R(s)G_p(s)$ är stabilt

$$u(t) = \sin \omega t \Rightarrow y(t) = |G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega))$$

$$z(t) = -|G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega))$$

$$= |G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega) + 180^\circ)$$

Stabilitet/instabilitet för återkopplade system

Om $u(t) = z(t)$ uppstår en självsvängning i kretsen när brytaren slås om. Detta händer om det finns en frekvens ω så att

$$|G_0(i\omega)| = 1$$

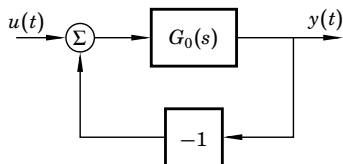
och

$$\arg G_0(i\omega) = -180^\circ$$

⇔

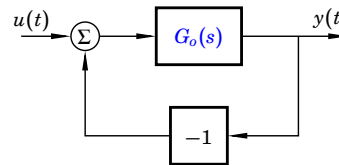
Nyquistkurvan för $G_0(s)$ går genom punkten $-1 + 0i$

Nyquists stabilitetssats



Antag att öppna systemet $G_0(s)$ saknar poler i höger halvplan. Det slutna systemet är asymptotiskt stabilt om punkten -1 ligger till vänster om Nyquistkurvan när den traverseras från $\omega = 0$ till $\omega = \infty$.

Bode- och Nyquistdiagram



OBS! Genom att **analysera öppna systemets överföringsfunktion**

$$L = G_o = G_R G_p$$

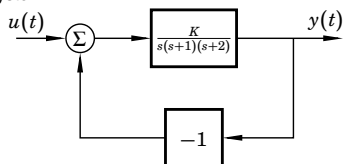
drar vi slutsatser om **slutna systemets stabilitet**

$$G_{cl} = \frac{L}{1+L} = \frac{G_o}{1+G_o}$$

Vi ritar alltså nästan alltid Bode- och Nyquist-diagram för $G_o(s)$

Exempel

3e ordningens system



$$G_0(i\omega) = \frac{K}{i\omega(1+i\omega)(2+i\omega)}$$

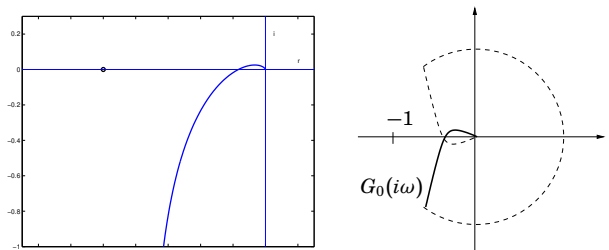
$$= \frac{-Ki(1-i\omega)(2-i\omega)}{\omega(1+\omega^2)(4+\omega^2)} = \frac{-Ki(2-\omega^2-3i\omega)}{\omega(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$$

$$= \frac{-3K}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} + i \frac{K(\omega^2-2)}{\omega(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G_0(R e^{i\phi}) = 0 \quad \lim_{r \rightarrow 0} G_0(r e^{i\phi}) = \frac{K}{2r} e^{-i\phi}$$

Exempel (forts.)

Stabilitet för slutna systemet



$$G_0(i\sqrt{2}) = -\frac{3K}{3 \cdot 6} = -\frac{K}{6}$$

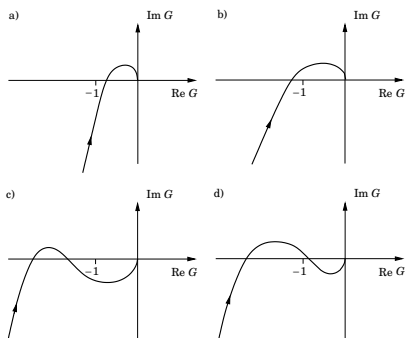
Asymptotiskt stabilt om $K < 6$, instabilt slutet system om $K > 6$.

(Med argumentvariationsprincipen kan man konstatera att det blir två poler i högra halvplanet om $K > 6$.)

Mini Quiz

Antag att $G = G_0$ inte har några poler i höger halvplan.

I vilka fall är det enkelt återkopplade systemet $\frac{G_0}{1 + G_0}$ asymptotiskt stabilt?



Harry Nyquist (1889–1976)

- ▶ Född i Nilsby, Värmland
- ▶ Karriär i USA
 - ▶ Univ. of North Dakota
 - ▶ Yale University
 - ▶ AT&T Bell Laboratories
- ▶ Tre viktiga resultat:
 - ▶ Nyquists stabilitetssats
 - ▶ Johnson–Nyquist-bruset
 - ▶ Nyquists samplingsats

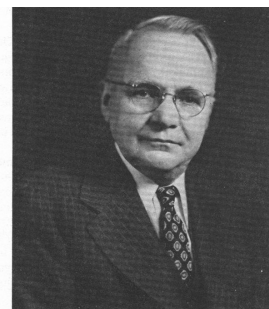
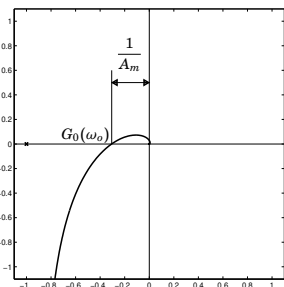


Fig. 10-1. H. Nyquist, who originated many fundamental concepts of communications, including the criterion for stability of negative feedback amplifiers and sampling theory as applied to digital systems.

Amplitudmarginal

Amplitudmarginalen anger hur mycket förstärkningen kan öka utan att slutna systemet blir instabilt:

- ▶ Låt ω_0 vara den minsta frekvens där $\arg G_0(i\omega_0) = -180^\circ$
- ▶ Amplitudmarginalen ges av $A_m = 1/|G_0(i\omega_0)|$

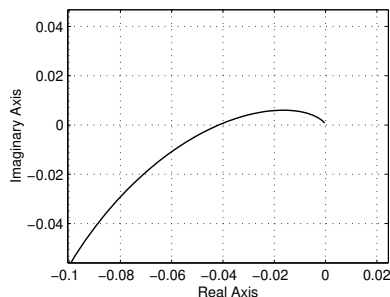


Exempel

Överföringsfunktion för process

$$G_P(s) = \frac{1}{(s + 3.732)(s + 1)(s + 0.2679)}$$

Nyquistkurva:

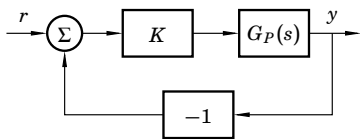


Exempel

Avläsning av amplitudmarginal:

$$\frac{1}{A_m} = 0.042 \Leftrightarrow A_m = 24$$

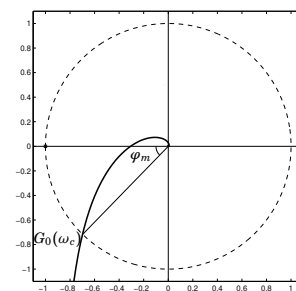
Tolkning: Om man reglerar systemet G_P med en P-regulator ($G_R = K$) kan förstärkningen vara max 24 utan att slutna systemet blir instabilt.



Fasmarginal

Fasmarginalen anger hur mycket fasen kan minska utan att slutna systemet blir instabilt:

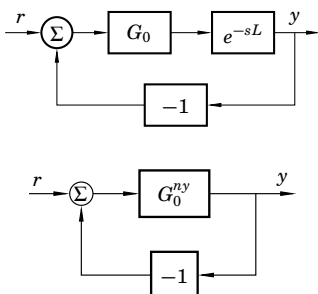
- ▶ Låt ω_c vara den minsta frekvens där $|G_0(i\omega_c)| = 1$
- ▶ Fasmarginalen ges av $\varphi_m = 180^\circ + \arg G_0(i\omega_c)$



Dödtidsmarginal/fördröjningsmarginal

Dödtidsmarginalen talar om hur lång dödtid L som kan adderas till reglerkretsen utan att den blir instabil.

Antag att vi har en kretsöverföringsfunktion $G_0(s)$ och att vi kompletterar denna med överföringsfunktionen för en dödtid, e^{-sL} .



Dödtidsmarginal/fördröjningsmarginal

Den nya kretsöverföringsfunktionen blir då

$$G_0^{ny}(s) = e^{-sL} G_0(s)$$

där L är dödtiden. Förstärkningen och fäsvridningen för den nya kretsöverföringsfunktionen ges av

$$|G_0^{ny}(i\omega)| = |G_0(i\omega)|$$

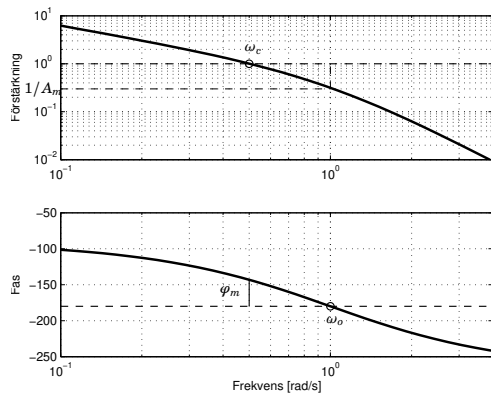
$$\arg G_0^{ny}(i\omega) = \arg G_0(i\omega) - \omega L$$

Förstärkningen påverkas alltså inte av dödtiden, medan fäsvridningen minskar. Antag att den ursprungliga kretsöverföringsfunktionen G_0 har skärfrekvensen ω_c , det vill säga $|G_0(i\omega_c)| = 1$, med motsvarande fasmarginal φ_m . Eftersom G_0^{ny} har samma förstärkning som G_0 kommer G_0^{ny} också att ha skärfrekvensen ω_c . Fasmarginalen kommer däremot att minska eftersom fäsvridningen har minskat. Den nya fasmarginalen blir

$$\varphi_m^{ny} = \varphi_m - \omega_c L$$

Om dödtiden är alltför lång försvinner fasmarginalen och det slutna systemet blir instabilt.

Amplitud- och fasmarginal i Bodediagrammet



Robusthet

För att få ett robust slutet system vill man typiskt ha

- ▶ $A_m \in [2, 6]$
- ▶ $\varphi_m \in [45^\circ, 60^\circ]$

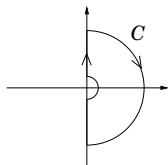
Ju större marginaler, desto mindre känslighet för modellfel och parametervariationer

Argumentvariationsprincipen (Reglerteori-kurs)

Hur många nollställen har en rationell funktion $f(s)$ ett område (t ex högra halvplanet)?

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{s \in C} \arg f(s) = P - N$$

För att bestämma antalet rötter i högra halvplanet väljer vi den slutna kurvan C på följande sätt och tittar på funktionens avbildning av kurvan.

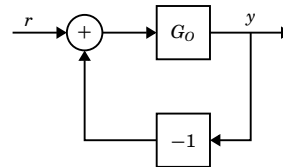


kurvsegment för C:

- (i) $s = i\omega, \omega \in (0, \infty)$ ← Nyquistkurvan!!
- (ii) $s = Re^{i\theta}, R \rightarrow \infty, \theta : \pi/2 \rightarrow -\pi/2$
- (iii) $s = i\omega, \omega \in (-\infty, 0)$
- (iv) $s = re^{i\theta}, r \rightarrow 0, \theta : -\pi/2 \rightarrow \pi/2$

Halvcirkeln runt origo undviker singularitet på randen (t ex om process eller regulator har integratorpol: $\frac{1}{s}$).

Stabilitet vid återkoppling



Slutna systemet

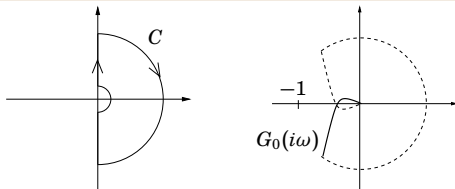
$$G_{cl} = \frac{G_o}{1 + G_o}$$

är asymptotiskt stabilt om och endast om alla nollställen till

$$1 + G_o(s)$$

ligger i vänstra halvplanet

Argumentvariationsprincipen vid återkoppling



- N = Antalet nollställen hos $1 + G_o(s)$ innanför kurvan C
- P = Antalet poler hos $1 + G_o(s)$ innanför kurvan C
- = Antalet poler hos $G_o(s)$ innanför kurvan C

Argumentvariationsprincipen ger

$$P - N = \text{Antalet varv runt origo hos } 1 + G_o(s), s \in C$$

$$= \text{Antalet varv runt } -1 \text{ hos } G_o(i\omega), \omega \in \mathbf{R}$$

Nyquistkriteriet

Om $G_o(s)$ är stabil ($P = 0$) så är slutna systemet $[1 + G_o(s)]^{-1}$ stabilt ($N = 0$) om och endast om Nyquistkurvan $G(i\omega)$ inte omcirklar -1 .

Skillnaden mellan antalet instabila poler i $G_o(s)$ och antalet instabila poler i $[1 + G_o(s)]^{-1}$ är lika med antalet varv som Nyquistkurvan går runt -1 .

Lab. 2 — Modellbygge och design

Hemuppgifter: 2.1, 2.2, 2.3, 2.4

På övning: 3.1, 3.5

Modellbygge (se övning 1.4)

$$\frac{dh_1}{dt} = f(h_1, q) \Rightarrow H_1(s) = \frac{b_1}{1 + sT_1} Q(s)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = f(h_1, h_2, q) \Rightarrow H_2(s) = \frac{b_2}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} Q(s)$$

Designberäkning

PI-reglering av övre tanken: Placera 2 poler (övn. 3.1)

PI-reglering av undre tanken: Placera 3 poler (övn. 3.5)

Kunskapskontroll

Sammanfattning

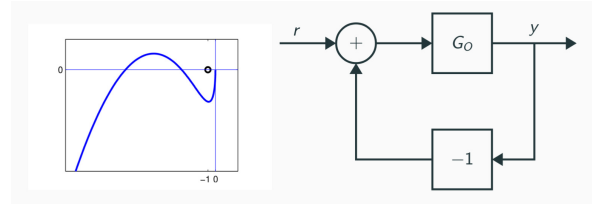
- ▶ Nyquistkriteriet (stabilitet)
- ▶ Stabilitetsmarginaler
 - ▶ Amplitud- och fasmarginal

Nästa föreläsningen - F7

1. Känslighetsfunktioner
2. Stationära fel

“När intuitionen fallerar är matematiken räddningen”

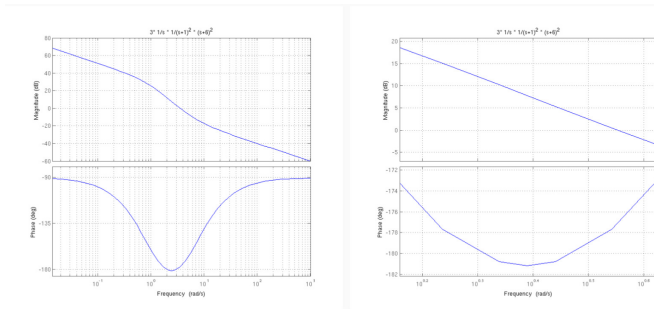
I “mini quiz” om Nyquistkriteriet frågades om vilka system som blev asymptotiskt stabila under *enkel* återkoppling.



Nyquist-kurvan till vänster i figuren **omcirklar ej punkten $-1 + 0i$** men korsar reella axeln med $|G_o(i\omega)| > 1$ så varför är det fortfarande stabilt då vi sluter loopen?

Betrakta **öppna** systemet (aka “slingförstärkning”)

$$G_o(s) = 3 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} \cdot (s+6)^2 = \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} \cdot (s/6+1)^2$$



Korsningarna med negativa reella axeln:

$$G_o(i\omega) = -12 \text{ för } \omega = 2 \quad \text{och} \quad G_o(i\omega) = -4.5 \text{ för } \omega = 3.$$

Slutna systemet

$$G_{cl} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{3 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} \cdot (s+6)^2}{1 + 3 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} \cdot (s+6)^2} = \frac{s^2 + 12s + 36}{s^3 + 3s^2 + 13s + 36}$$

Alt: Stabilitet kan undersökas med t ex Routh-Hurwitz kriteriet (se Formelsamling)

- (i) $a_1 = 3 > 0$
 $a_2 = 13 > 0$
 $a_3 = 36 > 0$
- (ii) $a_1 \cdot a_2 > a_3 \quad (3 \cdot 13 = 39 > 36)$

och slutna systemet är därför **asymptotiskt stabilt**.

Alt: Beräkna poler i matlab

```
» roots([1 3 13 36])
ans =
-0.0709 + 3.5482i      Alla poler i vänster
-0.0709 - 3.5482i      halvplan
-2.83
```