REGLERTEKNIK AK

Föreläsningar

Tore Hägglund

Lund 2021

Institutionen för Reglerteknik
Lunds Tekniska Högskola
Box 118
221 00 LUND

Innehåll

Förord

Detta kompendium består av föreläsningsanteckningar för kursen Reglerteknik AK vid Lunds tekniska högskola. Kompendiet är avsett som ett komplement till någon lärobok i reglerteknik, samt till den exempelsamling, formelsamling och laborationshandledning som används i kursen.

Kursen består av 15 föreläsningar, där den sista är en ren repetition av materialet i de tidigare 14. Av den anledningen innehåller kompendiet endast anteckningar från de första 14 föreläsningarna.

Tore Hägglund

Föreläsning 1

Introduktion. PID-regulatorn

I denna föreläsning ger vi först en introduktion till reglertekniken och visar hur man kan beskriva reglertekniska problem. Därefter introduceras den enklaste och vanligaste regulatortypen – PID-regulatorn.

1.1 Vad är reglerteknik?

Reglerteknik är tekniken att styra och kontrollera processer så att de uppför sig på önskat sätt. I många andra grundläggande ämnen, som fysik och mekanik, lär vi oss hur naturen fungerar. Vi betraktar och gör matematiska beskrivningar av olika fenomen i vår omgivning. Inom reglertekniken använder vi denna kunskap för att styra och kontrollera dessa fenomen. Inom mekaniken har vi till exempel lärt oss ekvationerna som beskriver hastigheten hos en vagn som rullar nedför ett sluttande plan. En reglertekniker kan använda motsvarande ekvationer för att konstruera utrustning för automatisk farthållning för bilar och på så sätt få bilen att hålla konstant hastighet trots variationer i vägbanans lutning.

Reglerteknik används på en mängd olika sätt. Här är några exempel:

- Autopiloter för flygplan och båtar är reglertekniska konstruktioner där fartygen automatisk håller en given kurs trots störningar i form av vind och strömmar.

- Att hålla konstant temperatur i lokaler, trots variationer i utomhustemperatur och antal personer i lokalen, är reglerteknik.

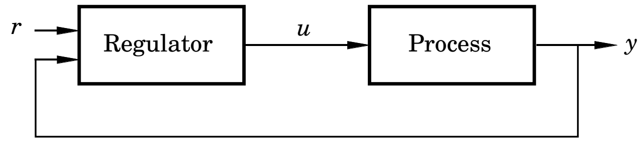
- I processindustrin, t.ex. ett pappersbruk, finns hundratals eller tusentals regulatorer som ser till att tryck, flöden, temperaturer, koncentrationer och nivåer hålles vid önskade värden.

- I moderna bilar finns många reglersystem för bland annat farthållning, låsningsfria bromsar, servostyrning, avgasrening och klimatreglering.

- I kameror finns reglersystem för bland annat autofokus och automatisk exponering.

- Det är inte bara i tekniska sammanhang som reglertekniken förekommer. I människokroppen finns till exempel många reglersystem. Ett exempel är temperaturregleringen som ser till att kroppens temperatur är $37°C$ trots variationer i den omgivande temperaturen och kroppens arbetsbelastning. Ett annat exempel är ljusregleringen i ögat. Pupillens storlek justeras automatiskt så att belysningen på näthinnan blir så jämn som möjligt.

Det intressanta är att alla dessa vitt skilda problem kan beskrivas och lösas med en gemensam teori. Det är den teorin vi lär ut i denna kurs.



Figur 1.1 Den enkla reglerkretsen

1.2 Den enkla reglerkretsen

Alla reglerproblem som beskrevs ovan kan sammanfattas i blockschemaform enligt figur 1.1. Reglerproblemen löses med hjälp av återkoppling (feedback). Den storhet vi vill reglera betecknas y och kallas mätsignal, utsignal eller ärvärde. Den signal vi använder för att påverka processen betecknas u och kallas styrsignal eller insignal. Den signal som anger vilket värde vi vill att den reglerade signalen ska anta betecknas r och kallas referensvärde eller börvärde. Beteckningarna ärvärde och börvärde är industristandard. Beteckningarna insignal och utsignal används i litteraturen, men är olyckliga eftersom de kan skapa förvirring. Hos regulatortillverkare är det t.ex. vanligt att i stället kalla styrsignalen för utsignal och mätsignalen för insignal.

Regulatorns uppgift är att bestämma styrsignalen u så att mätsignalen y följer börvärdet r så bra som möjligt. Reglerproblemet hade varit lätt om processen varit statisk, det vill säga om det fanns ett statiskt samband mellan y och u,

$$y(t) = f(u(t))$$

De flesta processer är dock dynamiska, så att

$$y(t) = f(u_{[-\infty,t]})$$

Avgörande för att kunna lösa ett reglertekniskt problem är att man förstår dynamiken hos den process som ska regleras. De närmaste föreläsningarna kommer att behandla processdynamik och olika sätt att representera processdynamik. Fortsättningen på denna föreläsning ska vi dock ägna åt regulatorn och beskriva den allra vanligaste regulatorn, nämligen PID-regulatorn.

1.3 PID-regulatorn

Vi skall nu härleda PID-regulatorns uppbyggnad, och därigenom visa att den är en naturlig utvidgning av den allra enklaste reglerformen, nämligen On/Off-regulatorn.

On/Off-regulatorn

On/Off-regulatorn är den allra enklaste formen av regulator man kan tänka sig. Dess utsignal u ges av

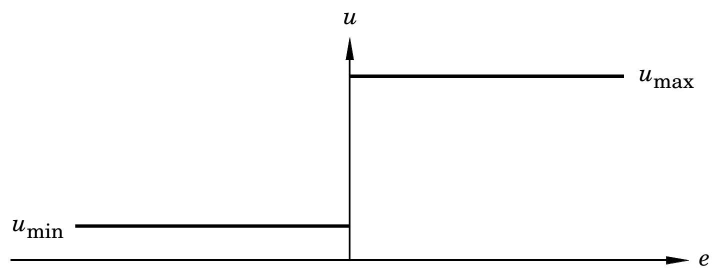
$$u = \begin{cases} u_{\max} & e > 0 \\ u_{\min} & e < 0 \end{cases}$$

där e är reglerfelet, det vill säga skillnaden mellan börvärdet r och ärvärdet y:

$$e = r - y$$

On/Off-regulatorns funktion kan också beskrivas grafiskt enligt figur 1.2.

En nackdel med denna regulator är att den ger upphov till svängningar i reglerkretsen. För att regulatorn skall lyckas hålla ärvärdet nära börvärdet måste den ständigt växla styrsignalen mellan de två nivåerna $u_{\max}$ och $u_{\min}$. Om vi t.ex. reglerar hastigheten hos en bil med hjälp av gaspedalen där gaspedalen bara kan anta värdena “ingen gas” och “full gas”, kommer vi att behöva växla mellan dessa två värden för att hålla medelhastigheten vid börvärdet. Man kan köra bilen så, men det är ingen bra reglering.



Figur 1.2 Styrsignalen vid On/Off-reglering.

P-delen

On/Off-regulatorns funktion är bra vid stora reglerfel. Då kan det vara vettigt att antingen släppa gasen helt eller att ge full gas. Svängningarna orsakas av regulatorns uppförande vid små reglerfel. Ett sätt att komma till rätta med svängningarna är att minska regulatorns förstärkning vid små värden på reglerfelet. Det kan man göra genom att införa ett proportionalband, eller en P-regulator. Styrsignalen i en P-regulator ges av

$$u = \begin{cases} u_{\max} & e > e_0 \\ u_0 + Ke & -e_0 \le e \le e_0 \\ u_{\min} & e < -e_0 \end{cases}$$

där u_0 är styrsignalens nivå då det inte finns något reglerfel och K är regulatorns förstärkning. P-regulatorn kan också beskrivas grafiskt enligt figur 1.3. P-regulatorns utsignal överensstämmer med On/Off-regulatorns utsignal vid stora reglerfel. Då absolutvärdet av reglerfelet är mindre än ett värde e_0 övergår emellertid styrsignalen till att bli proportionell mot reglerfelet.

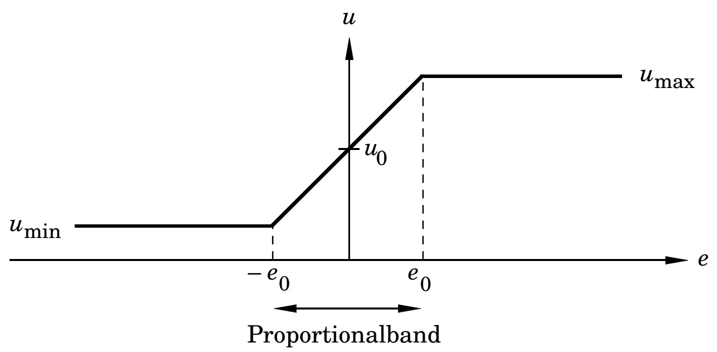
I många regulatorer anger man proportionalbandet (PB) i stället för förstärkningen. Relationen mellan dem är

$$PB = \frac{100}{K} [\%]$$

Förstärkningen $K = 1$ motsvarar alltså ett proportionalband på $PB = 100\%$.

P-regulatorn gör att de svängningar som finns vid On/Off-reglering försvinner. Tyvärr sker detta till priset av att man får ett nytt problem. Det är nu inte längre säkert att det stationära reglerfelet blir noll, eller med andra ord att börvärde och ärvärde överensstämmer när alla signaler i reglerkretsen blivit konstanta. Detta kan man lätt övertyga sig om genom att studera styrsignalen. Vid små reglerfel arbetar P-regulatorn inom sitt proportionalband. Reglerfelet ges då av

$$e = \frac{u - u_0}{K}$$



Figur 1.3 Styrsignalen vid P-reglering.

I stationaritet blir reglerfelet $e = 0$ om och endast om minst ett av nedanstående två villkor är uppfyllt.

1. K är oändligt stor
2. $u_0 = u$

Alternativ ett, oändlig regulatorförstärkning eller proportionalbandet lika med noll, motsvarar ju On/Off-regleringen. Detta alternativ är därför ingen bra lösning, eftersom man ju då är tillbaka vid det ursprungliga problemet med svängningar. Vi är alltså hänvisade till alternativ två om vi vill eliminera det stationära reglerfelet. Vi kan bara bli av med det stationära reglerfelet om vi kan hitta ett sätt att variera u_0 som gör att u_0 antar samma värde som styrsignalen u för alla värden på börvärdet r.

Av uttrycket för reglerfelet hos P-regulatorn ser vi att ju högre regulatorförstärkningen K är desto mindre blir reglerfelet. Vi ser också att vi minimerar det största stationära reglerfelet som kan uppkomma om vi väljer ett u_0 som ligger mitt i styrsignalens arbetsområde. I de flesta regulatorer är u_0 därför förvalt till $u_0 = 50\%$. I en del regulatorer kan man justera värdet på u_0. Av diskussionen ovan ser vi att man i detta fall bör välja u_0 så nära det stationära värdet på styrsignalen u som möjligt.

I-delen

Om man i stället för att låta u_0 vara en konstant parameter försöker justera den automatiskt så att man uppnår att $u_0 = u$ när alla signaler i reglerkretsen blivit konstanta eliminerar man det kvarstående reglerfelet. Det är just detta integraldelen (I-delen) i PI-regulatorn åstadkommer. Styrsignalen i en PI-regulator ges av

$$u = K\left(\frac{1}{T_i}\int e(t)dt + e\right)$$

där T_i är regulatorns integraltid. Den i P-regulatorn konstanta nivån u_0 har alltså ersatts med termen

$$u_0 = \frac{K}{T_i}\int e(t)dt$$

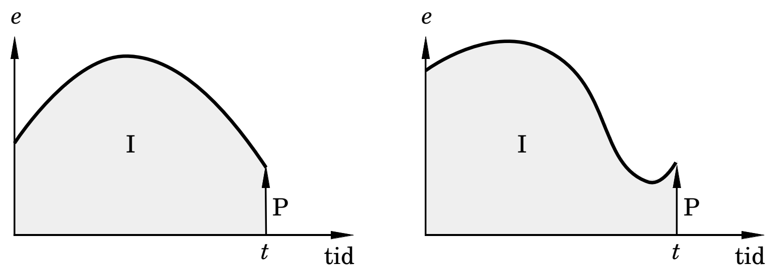
som är proportionell mot *integralen* av reglerfelet. Det är därför termen kallas integraltermen eller PID-regulatorns integraldel.

Man kan övertyga sig om att PI-regulatorn har förmågan att eliminera kvarstående reglerfel genom att studera styrlagen ovan. Antag, att vi har ett stationärt reglerfel sådant att $e \neq 0$ trots att vi har en PI-regulator. Om reglerfelet e är konstant kommer även proportionaldelen i PI-regulatorn att vara konstant med värdet Ke. Integraldelen kommer däremot inte att vara konstant. Den kommer att växa eller avta, beroende på om reglerfelet är positivt eller negativt. Om styrsignalen växer (avtar) måste också processens mätsignal y förr eller senare växa eller avta. Det innebär i sin tur att felet $e = r - y$ inte kan vara konstant. Eftersom detta strider mot antagandet att felet är stationärt har vi alltså visat att vi inte kan ha något stationärt fel skilt från noll då regulatorn innehåller en integraldel. Det enda tillfället då samtliga signaler i reglerkretsen är konstanta är då $e = 0$.

Vi har nu visat att en PI-regulator löser problemet med kvarstående stationärt reglerfel och problemet med svängningar vid On/Off-reglering. PI-regulatorn är därför en regulator utan några egentliga brister. Oftast är den tillräcklig när kraven på reglerkretsens prestanda inte är alltför höga. Därför är PI-regulatorn den i särklass vanligaste regulatorn i industriella sammanhang.

D-delen

En egenskap som begränsar PI-regulatorns prestanda är att den enbart ser till gamla reglerfel och vad som har hänt; den försöker inte prediktera vad som kommer att hända med reglerfelet i framtiden. Problemet illustreras i figur 1.4. De två



Figur 1.4 Två reglerfall där utsignalen från en PI-regulator är lika stor vid tidpunkten t.

kurvorna i figur 1.4 visar utvecklingen av reglerfelet i två fall. P-delen i regulatorn är proportionell mot reglerfelet vid den aktuella tidpunkten t. Detta reglerfel är lika stort i de två figurerna. Integraldelen är proportionell mot ytan som bildas under reglerfelskurvan. Dessa ytor är också lika stora i de två fallen. Det betyder att en PI-regulator ger exakt samma styrsignal vid tiden t i de två fallen. En intelligent regulator borde se att det är stor skillnad mellan de två reglerfallen. I den vänstra kurvan minskar reglerfelet snabbt, och regulatorn borde här ta det försiktigt för att undvika en översläng i regleringen. I den högra kurvan har reglerfelet efter att tidigare ha minskat plötsligt börjat öka. Här borde regulatorn ta i kraftigt för att få ner felet igen. Derivatadelen i PID-regulatorn utför just denna typ av kompensering.

D-delen i en PID-regulator är proportionell mot ändringen i reglerfelet, det vill säga derivatan. Se figur 1.5. Ekvationen för PID-regulatorn är:

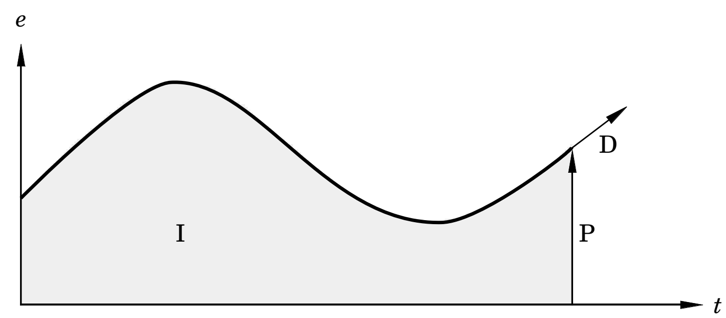
$$u = K\left(e + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{de}{dt}\right)$$

där T_d är regulatorns derivatatid.

D-delen är till störst nytta i de fall där man vinner mycket på att prediktera felet. Många temperaturregleringar är av denna typ. På grund av trögheten är det i dessa fall viktigt att avbryta uppvärmningen i tid. Långsam värmeledning kan göra att temperaturen fortsätter att stiga långt efter det att uppvärmningen upphört.

Alla som har stekt på en tjockbottnad stekpanna har sett detta fenomen. Det kan ta ganska lång tid från det att man sätter ner temperaturen på spisen tills temperaturen på pannan börjar sjunka. Under tiden kan temperaturen göra en rejäl ”översläng” om man inte har haft en försiktig reglering.

PID-regulatorn kan sammanfattas med figur 1.5. Proportionaldelen ger ett bidrag till styrsignalen som är proportionellt mot det aktuella reglerfelet. Integraldelen är PID-regulatorns minne. Den är proportionell mot en viktad summa av alla gamla reglerfel. Derivatadelen försöker se framåt och används för att beräkna hur reglerfelet kommer att förändras den närmaste framtiden.



Figur 1.5 Integraldelen är proportionell mot ytan under reglerfelet, proportionaldelen är proportionell mot det aktuella reglerfelet, och derivatadelen är proportionell mot ändringen av reglerfelet.

Föreläsning 2

Processmodeller

I de närmaste föreläsningarna ska vi diskutera olika sätt att beskriva processens dynamik. Det finns i princip två sätt att ta fram en modell som beskriver dynamiken hos processen. Det ena är att räkna ut modellen via massbalanser, energibalanser, kraft- och momentjämvikter etc. Det andra sättet är att utföra experiment på processen. Oftast används en kombination av de två.

2.1 Tillståndsmodell

Genom att ställa upp lämpliga balansekvationer kan man beskriva processen med en differentialekvation:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y = b_0 \frac{d^n u}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n u \tag{2.1}$$

Denna ekvation är linjär. Oftast leder balansekvationerna dock till olinjära differentialekvationer. Detta problem behandlar vi i nästa avsnitt.

Differentialekvationen (2.1) kan skrivas på tillståndsform. Om man inför n stycken tillstånd $x_1, x_2, \cdots, x_n$, kan ekvation (2.1) skrivas som ett system av första ordningens differentialekvationer:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \\
\\
y &= g(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)
\end{aligned}$$

Notera att funktionerna f_i och g är funktioner av tillstånden och styrsignalen. Mätsignalen y får inte förekomma här.

Inför vektorerna

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Då kan vi skriva ekvationssystemet på den kompakta formen

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, u) \\
y &= g(x, u)
\end{aligned}$$

EXEMPEL 2.1—FRÅN DIFFERENTIALEKVATION TILL TILLSTÅNDSFORM
Antag att vi fått fram följande differentialekvation som beskriver processen:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = bu$$

Eftersom detta är en andra ordningens differentialekvation är $n = 2$ och det behövs två tillstånd för att skriva ekvationen på tillståndsform. Dessa kan väljas på oändligt många olika sätt. Ett möjligt val är

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}$$

Detta ger följande tillståndsbeskrivning:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

□

Allmänt ser tillståndsbeskrivningen ut som:

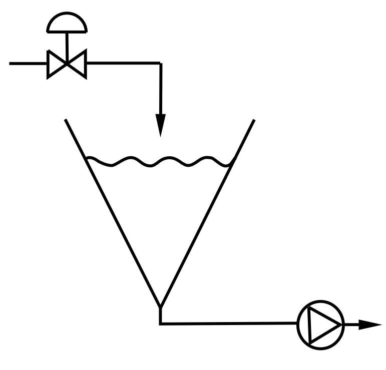
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

där A, B, C och D är matriser. Så kan den alltid skrivas under förutsättning att $f(x,u)$ och $g(x,u)$ är linjära.

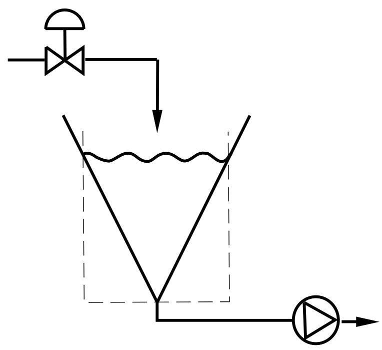
Att f och g är linjära innebär att processen har samma dynamiska egenskaper i alla driftlägen. Om processen är linjär gäller superpositionsprincipen. Om styrsignalerna u_1 och u_2 resulterar i mätsignalerna y_1 respektive y_2 säger superpositionsprincipen att styrsignalen $u_1 + u_2$ resulterar i mätsignalen $y_1 + y_2$.

I figur 2.1 visas ett exempel på en process som *inte* är linjär. Processen består av en tank där vätska pumpas ut. Målet för regleringen är att styra ventilen som påverkar inflödet till tanken så att nivån hålles konstant. Då tanknivån är låg är tankens tvärsnittsarea liten. Det betyder att en ändring i inflödet ger en relativt snabb och stor ändring av tanknivån. Processen är därför snabb och har en hög förstärkning vid låg tanknivå. Då tanknivån är hög blir processen långsam med en låg förstärkning.

Vad gör vi om f eller g är olinjära? Man kan naturligtvis beskriva processen med olinjära differentialekvationer, men detta blir betydligt mer komplicerat att hantera. Därför gör man ofta så att man approximerar den olinjära ekvationen med



Figur 2.1 En olinjär process



Figur 2.2 Linjärisering av en olinjär process

en linjär. Metoden illustreras i figur 2.2. Om vi vet att vi vill reglera tanken vid en viss nivå, kan vi anta att tanken har vertikala väggar som i figuren. På så sätt får vi en linjär process. När vi ligger nära den önskade nivån ska förhoppningsvis de linjära och olinjära ekvationerna ha likartade egenskaper.

2.2 Linjärisering

Vi ska nu visa hur man kan linjärisera ett system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned}$$

där f och g är olinjära funktioner av x och u. Vid linjäriseringen går man igenom följande fyra steg:

1. Bestäm en stationär punkt (x_0, u_0) vid vilken vi ska approximera systemet. Vid en stationär punkt gäller att

$$\dot{x}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0, u_0) = 0$$

2. Taylorserieutveckla f och g runt (x_0, u_0). Behåll enbart första ordningens termer.

$$\begin{aligned} f(x, u) &\approx f(x_0, u_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, u_0)(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u_0)(u - u_0) \\ g(x, u) &\approx g(x_0, u_0) + \frac{\partial}{\partial x} g(x_0, u_0)(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial u} g(x_0, u_0)(u - u_0) \end{aligned}$$

Notera att $f(x_0, u_0) = 0$ och inför beteckningen $y_0 = g(x_0, u_0)$.

3. Introducera nya variabler:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x_0 \\ \Delta u &= u - u_0 \\ \Delta y &= y - y_0 \end{aligned}$$

4. Tillståndsekvationerna i de nya variablerna blir nu:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta x} &= \dot{x} - \dot{x}_0 = \dot{x} = f(x, u) \approx \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, u_0)\Delta x + \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u_0)\Delta u = A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y &= y - y_0 = g(x, u) - y_0 \approx \frac{\partial}{\partial x} g(x_0, u_0)\Delta x + \frac{\partial}{\partial u} g(x_0, u_0)\Delta u = C\Delta x + D\Delta u \end{aligned}$$

Notera att x och f är vektorer. Om vi till exempel har ett andra ordningens system med två tillstånd, x_1 och x_2, en mätsignal y och en styrsignal u gäller att

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

EXEMPEL 2.2—LINJÄRISERING AV OLINJÄR TANK

I figur 2.3 visas den olinjära tankprocessen vi studerat tidigare, men nu med några beteckningar utritade. Om vi antar att väggarna bildar en vinkel som gör att diametern på vätskeytan är lika stor som vätskehöjden h blir vätskevolymen

$$V = \frac{\pi h^3}{12}$$

En massbalans för tanken ger att ändringen av volymen är lika med inflödet minus utflödet:

$$\frac{dV}{dt} = q_{in} - q_{ut}$$

Vi är intresserade av ändringar i nivån. Dessa får vi genom

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

Alltså:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}(q_{in} - q_{ut})$$

Inför de välkända beteckningarna:

$$x = y = h, \quad u = q_{in}$$

och förutsätt att q_{ut} är konstant. Då får vi den olinjära tillståndsbeskrivningen

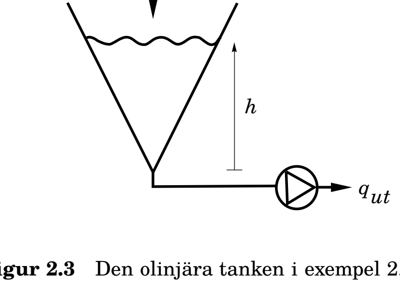
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{4}{\pi x^2}(u - q_{ut}) = f(x, u) \\ y &= x = g(x, u) \end{aligned}$$

Nu linjäriserar vi enligt metodiken ovan:

1. Stationär punkt.

$$f(x_0, u_0) = 0 \Leftrightarrow u_0 = q_{ut}$$

Detta villkor innebär helt enkelt att inflödet skall vara lika med utflödet stationärt. Vi får inga krav på nivån x_0, det vill säga vi kan linjärisera vid vilken nivå som helst.



Figur 2.3 Den olinjära tanken i exempel 2.2

2. Taylorserieutveckling.

$$
\begin{aligned}
f(x,u) &\approx -\frac{8}{\pi x_0^3}(u_0 - q_{ut})(x - x_0) + \frac{4}{\pi x_0^2}(u - u_0) = \frac{4}{\pi x_0^2}(u - u_0) \\
g(x,u) &\approx y_0 + 1 \cdot (x - x_0) + 0 \cdot (u - u_0) = y_0 + (x - x_0)
\end{aligned}
$$

3. Nya variabler:

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= x - x_0 \\
\Delta u &= u - u_0 \\
\Delta y &= y - y_0
\end{aligned}
$$

4. Tillståndsekvationer i de nya variablerna:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Delta x} &= f(x,u) \approx \frac{4}{\pi x_0^2}\Delta u \\
\Delta y &= g(x,u) - y_0 = \Delta x
\end{aligned}
$$

Vi ser alltså att linjäriseringen i detta fallet inneburit att vi ersatt divisionen med h^2 i den ursprungliga ekvationen med en division med x_0^2, där x_0 är nivån som vi linjäriserar kring. □

2.3 Överföringsfunktionen

Laplacetransformen av en tidsfunktion $f(t)$ definieras som

$$
\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t)dt
$$

där variabeln s är ett komplext tal. Om $f(0) = 0$ har Laplacetransformen den trevliga egenskapen att

$$
\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)(s) = sF(s)
$$

det vill säga derivation av tidsfunktionen motsvaras av multiplikation av motsvarande Laplacetransform med s. Högre ordningens derivator ges på motsvarande sätt av

$$
\mathcal{L}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right)(s) = s^n F(s)
$$

förutsatt att $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{n-1}(0) = 0$. Vi kommer i fortsättningen att förutsätta att alla dessa funktionsvärden är noll.

Exempel 2.3—Laplacetransform av differentialekvation
Antag att följande differentialekvation beskriver processen:

$$
\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_1\dot{u} + b_2 u
$$

Laplacetransformering ger:

$$
(s^2 + a_1 s + a_2)Y(s) = (b_1 s + b_2)U(s)
$$

Detta kan också skrivas som

$$
Y(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}U(s) = G(s)U(s)
$$

□

Funktionen $G(s)$ kallas systemets överföringsfunktion. Ofta består den, som i exemplet ovan, av kvoten mellan två polynom:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

Nollställena till polynomet $Q(s)$ kallas systemets nollställen. Nollställena till polynomet $P(s)$ kallas systemets poler. Längre fram kommer vi att se att polernas värden är av avgörande betydelse för uppförandet hos systemet.

Exempel 2.4—PID-regulatorns överföringsfunktion
I detta exempel beräknar vi PID-regulatorns överföringsfunktion. Från Föreläsning 1 hämtar vi ekvationen för PID-regulatorn:

$$u = K\left(e + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{de}{dt}\right)$$

Laplacetransformering ger

$$U(s) = K\left(E(s) + \frac{1}{sT_i}E(s) + T_d sE(s)\right) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i} + T_d s\right)E(s)$$

Här har vi utnyttjat att integration svarar mot division med s, på samma sätt som derivation svarar mot multiplikation med s.

PID-regulatorns överföringsfunktion ges alltså av

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i} + T_d s\right)$$

□

Samband mellan tillståndsbeskrivning och överföringsfunktion

Ofta vill man kunna arbeta både med tillståndsbeskrivningen och överföringsfunktionen. Därför är det viktigt att kunna ta sig mellan dessa beskrivningar. Vi avslutar därför med att visa hur det går till.

Övergång tillståndsform → G(s) Utgå från tillståndsbeskrivningen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Laplacetransformering ger

$$\begin{aligned}sX(s) &= AX(s) + BU(s)\\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

Lös ut $X(s)$ ur den första ekvationen och eliminera därefter $X(s)$ i den andra.

$$\begin{aligned}X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s)\\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)\end{aligned}$$

där I är enhetsmatrisen. Överföringsfunktionen blir alltså

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Överföringsfunktionens nämnarpolynom ges av $P(s) = \det(sI - A)$, vilket innebär att det är identiskt med karaktäristiska polynomet för matrisen A. Det betyder att systemets poler är identiska med egenvärdena hos matrisen A. Detta kommer vi att utnyttja i fortsättningen.

Övergång G(s) → tillståndsform Det finns ingen entydig lösning på detta problem. För en n-te ordningens överföringsfunktion krävs det minst n tillstånd, men dessa tillstånd kan väljas på oändligt många olika sätt. Det är dessutom tillåtet att välja fler än n tillstånd.

Ibland är valet av tillstånd naturligt och ges av vissa fysikaliska storheter som läge, hastighet och acceleration. I andra sammanhang känner vi inga fysikaliska tillstånd och är bara intresserade av att få fram en godtycklig n-te ordningens tillståndsbeskrivning. För detta exemplet finns det tre olika beskrivningar i formelsamlingen: Styrbar form, observerbar form, samt diagonalformen.

2.4 Blockschemabeskrivning

I figur 1.1 beskrevs den enkla reglerkretsen i ett blockschema, eller blockdiagram som det också kallas. Blockschema är ett bekvämt och effektivt sätt att beskriva samband mellan signaler i reglertekniska sammanhang. Om man ersätter de allmänna beskrivningarna som *Regulator* och *Process* i figur 1.1 med de överföringsfunktioner som beskriver sambandet mellan signalerna kan man ur blockschemat räkna ut samband mellan olika signaler i diagrammet.

I figur 2.4 visas ett mycket enkelt blockdiagram som enbart beskriver en process med insignalen u, utsignalen y och överföringsfunktionen $G_P(s)$. Diagrammet ska tolkas så att den signal som kommer ut från blocket ges av överföringsfunktionen i blocket gånger insignalen, d.v.s.

$$Y(s) = G_P(s)U(s)$$

De flesta blockdiagram består av tre komponenter; block med överföringsfunktioner, signaler som representeras med pilar och summatorer. I figur 2.5 visas blockschemat för den enkla reglerkretsen med processens överföringsfunktion G_P, regulatorns överföringsfunktion G_R och signalerna referensvärde r, styrsignal u, mätsignal y och reglerfel e. Blockschemat ger följande samband mellan signalerna.

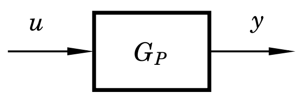
$$\begin{aligned} Y &= G_p U \\ U &= G_R E \\ E &= R - Y \end{aligned} \tag{2.2}$$

Om man till exempel vill bestämma överföringsfunktionen mellan referensvärdet r och mätsignalen y kan man successivt eliminera de övriga signalerna på följande sätt.

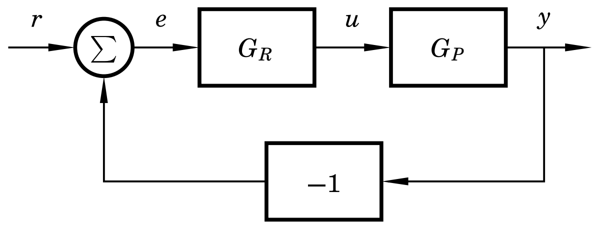
$$\begin{array}{lcllcl} Y = G_p U & \longrightarrow & Y = G_p U & \longrightarrow & Y = G_p G_R (R - Y) \\ U = G_R E & & U = G_R (R - Y) & & \\ E = R - Y & & & & \end{array}$$

Slutligen ges överföringsfunktionen mellan r och y av

$$\begin{aligned} Y &= G_p G_R (R - Y) \\ (1 + G_p G_R) Y &= G_p G_R R \\ Y &= \frac{G_p G_R}{1 + G_p G_R} R \end{aligned} \tag{2.3}$$



Figur 2.4 Blockdiagram för en process



Figur 2.5 Blockdiagram för en reglerkrets

När man vant sig vid blockschemaräkning behöver man ofta inte ställa upp delresultat liknande dem i (2.2), utan man kan direkt skriva upp ekvationer där enbart de intressanta signalerna finns med, som den översta ekvationen i (2.3). Det gör man genom att utgå från utsignalen och sedan arbeta sig bakåt i schemat, mot pilarnas riktning.

Vid mer komplicerade konstruktioner behöver man dock dela upp räkningarna och införa hjälpvariabler om sådana inte redan är utsatta. I dessa fall kan det vara bra att skriva in hjälpvariabler efter summatecknen, som e i figur 2.5.

Föreläsning 3

Impuls- och Stegsvarsanalys

I denna föreläsning ska vi först beskriva ytterligare två processmodeller, nämligen impuls- och stegsvaret. Därefter ska vi undersöka sambandet mellan överföringsfunktionens och stegsvarets egenskaper.

Ett system kan skrivas på tillståndsform

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Lösningen till detta system av differentialekvationer är

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \tag{3.1}$$

Utsignalen y kan alltså beskrivas med tre termer. Den första termen tar hänsyn till initialtillstånden. Dessa är för det mesta ointressanta i reglertekniska sammanhang utom när regulatorn tas i drift. Den tredje termen är en så kallad direktterm. Den är ofta försumbar i tekniska system. Återstår den andra termen. Den består av en integral av styrsignalen, viktad på något sätt. Vi ska använda lösning (3.1) för att studera impulssvaret och stegsvaret. I nästa föreläsning ska vi använda lösningen för att undersöka frekvenssvaret.

3.1 Impulssvar

I figur 3.1 visas ett impulssvar, dvs utsignalen y från en process då insignalen u är en kort puls. Antag att styrsignalen kan beskrivas som en ideal puls, dvs en Diracfunktion

$$u(t) = \delta(t)$$

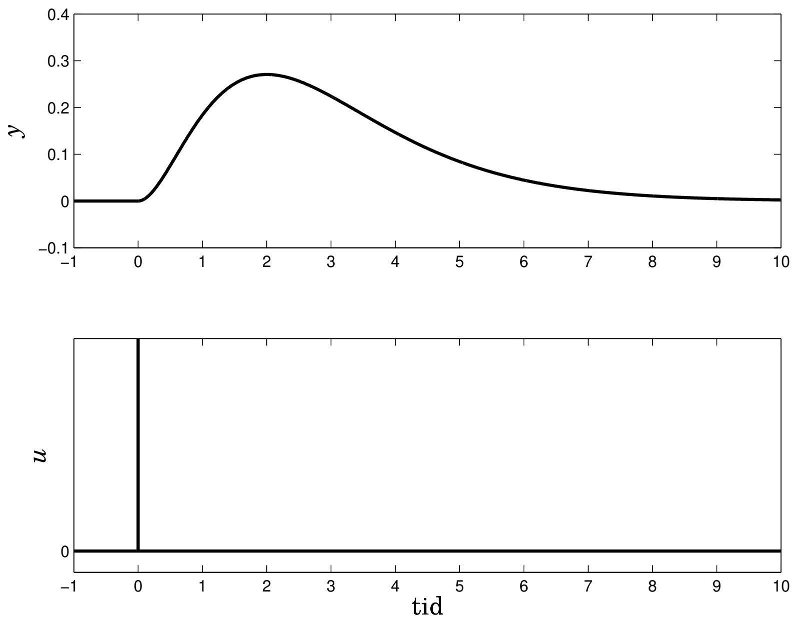
Om vi sätter in denna styrsignal i ekvation (3.1) och förutsätter att initialtillståndet $x(0) = 0$ får vi

$$y(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)d\tau + D\delta(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \equiv h(t) \tag{3.2}$$

Impulssvaret kallas även viktfunktionen och betecknas $h(t)$. Anledningen är följande. Genom att jämföra uttrycket för viktfunktionen (3.2) med den generella ekvationen för utsignalen ser vi att vi kan skriva om ekvation (3.1) som

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{3.3}$$

Viktfunktionen talar med andra ord om vilken vikt man ska lägga vid gamla insignaler då man beräknar utsignalen.



Figur 3.1 Impulssvarsexperiment

Laplacetransformen för en impuls fås ur definitionen på Laplacetransformen:

$$U(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = 1$$

Det betyder att Laplacetransformen av impulssvaret är lika med överföringsfunktionen:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = Y(s)$$

Impulssvarsanalys är inte särskilt vanligt i tekniska system. Däremot är det vanligt i medicinska och biologiska system. Man kan t.ex. injicera ett ämne i blodet och studera upptagning och utsöndring.

3.2 Stegsvar

I figur 3.2 visas ett stegsvar, dvs utsignalen y från en process då insignalen u är ett steg. Detta är det i särklass vanligaste experimentet för att bestämma en processmodell i tekniska sammanhang. Antag att styrsignalen är ett steg:

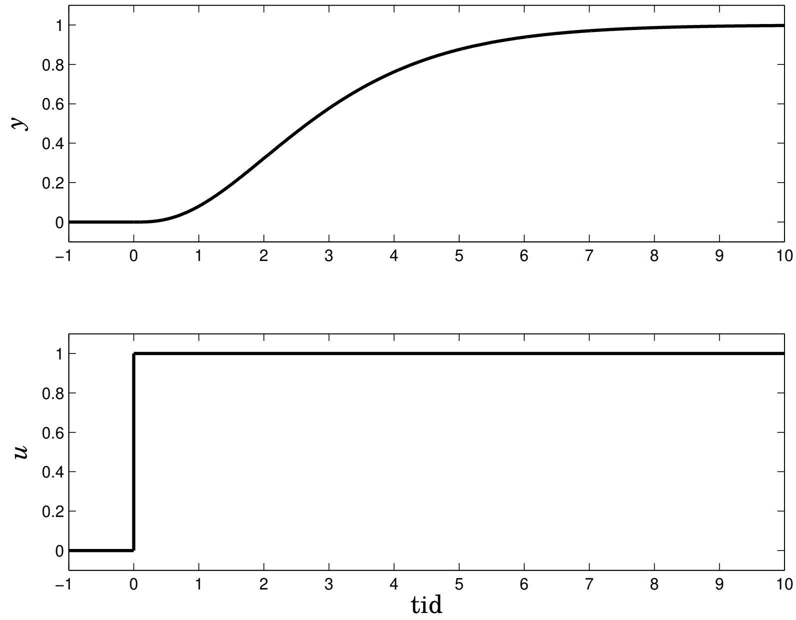
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Om vi sätter in denna styrsignal i ekvation (3.3) får vi

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau')d\tau' = [\tau = t - \tau'] = \int_0^t h(\tau)d\tau$$

Stegsvaret är med andra ord integralen av impulssvaret. Laplacetransformen för ett steg är

$$U(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$



Figur 3.2 Stegsvarsexperiment

3.3 Samband mellan poler och stegsvar

Vi ska i detta avsnitt studera sambandet mellan överföringsfunktionen och stegsvaret. Då insignalen $u(t)$ är ett steg blir Laplacetransformen av utsignalen $y(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s}$$

Om man vill veta hur stegsvaret ser ut kan man naturligtvis inverstransformera detta uttryck. I många sammanhang är det dock bra att kunna se stegsvarets egenskaper direkt i överföringsfunktionen utan att behöva inverstransformera.

Två satser som är användbara för att avgöra stegsvarets egenskaper i initialskedet och i slutskedet är:

Begynnelsevärdesteoremet: $$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Slutvärdesteoremet: $$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

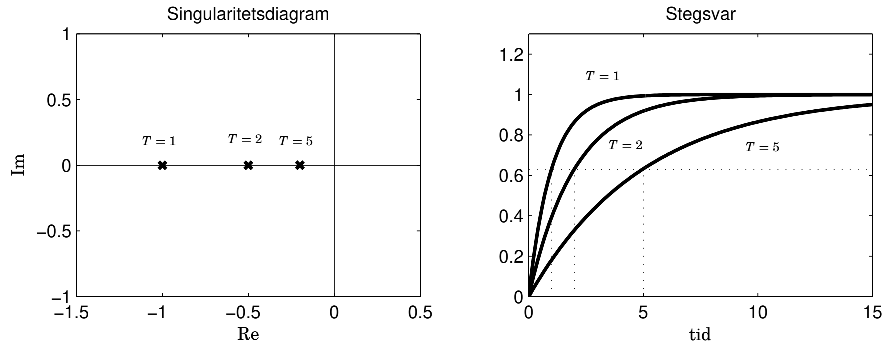
Det är viktigt att betona att dessa satser måste användas med försiktighet. Innan man använder dem måste man först övertyga sig om att gränsvärdena verkligen existerar. Detta kommer vi att förklara närmare längre fram i kursen, i Föreläsning 7.

Med hjälp av slutvärdesteoremet kan man på följande sätt beräkna slutvärdet av mätsignalen y då insignalen u är ett enhetssteg

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = G(0)$$

Förutsatt att gränsvärdet existerar bestäms det stationära värdet av utsignalen alltså av överföringsfunktionens statiska förstärkning $G(0)$.

Stegsvarets egenskaper bestäms till stor del av polernas värden. I denna föreläsning ska vi se hur polernas värden påverkar stegsvarets egenskaper för några enkla processer. Nollställenas inverkan behandlas längre fram i kursen, i Föreläsning 12.



Figur 3.3 Polernas placering och stegsvaret för processen $G(s) = K/(1 + sT)$ då $K = 1$ och $T = 1, 2$ och 5.

EXEMPEL 3.1—FÖRSTA ORDNINGENS SYSTEM
Antag att en process har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}$$

Denna process har en pol i $s = -1/T$. Om insignalen till processen är ett enhetssteg blir Laplacetransformen av processens utsignal

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{K}{s(1 + sT)}$$

Genom att inverstransformera detta uttryck får vi processens utsignal

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

Om $T < 0$, det vill säga om polen ligger i högra halvplanet, är processen instabil och $y(t)$ växer obegränsat. I fortsättningen förutsätter vi att $T > 0$, d.v.s att polen ligger i vänstra halvplanet.

I figur 3.3 visas processens stegsvar för tre olika värden på T. Figuren visar att ju mindre T är desto snabbare blir stegsvaret. I figuren visas också processens pol. Ju längre in i vänstra halvplanet polen ligger desto snabbare blir stegsvaret.

I detta exempel ger slutvärdesteoremet

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sK}{s(1 + sT)} = K$$

Slutvärdesteoremet säger att processens utsignal går mot $y = K$ då $t \to \infty$.

Parametern T kallas för processens tidskonstant. Vid tidpunkten $t = T$ är processens utsignal

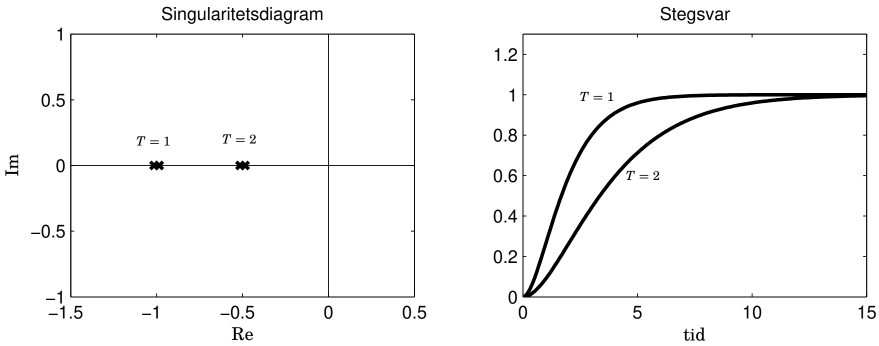
$$y(T) = K\left(1 - e^{-T/T}\right) = K\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0.63K$$

Tidskonstanten T anger alltså den tid det tar för stegsvaret att nå upp till 63% av sitt slutvärde. Detta framgår av figur 3.3.

Begynnelsevärdesteoremet applicerat på $y(t)$ ger informationen att $y(0) = 0$. Mer intressant är att studera hur snabbt processens utsignal ändras i initialskedet, det vill säga att studera $\dot{y}(0)$.

$$\lim_{t\to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2 K}{s(1 + sT)} = \frac{K}{T}$$

Ju kortare tidskonstanten är, det vill säga ju längre in i vänstra halvplanet polen ligger, desto snabbare ändras processens utsignal initialt. Detta framgår också av figur 3.3. □



Figur 3.4 Polernas placering och stegsvaret för processen $G(s) = K/(1+sT)^2$ då $K = 1$ och $T = 1$ och 2.

EXEMPEL 3.2—ANDRA ORDNINGENS SYSTEM, REELLA POLER
Antag att en process har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

Denna process har två reella poler i $s = -1/T_1$ och $s = -1/T_2$. Om insignalen till processen är ett enhetssteg blir Laplacetransformen av processens utsignal

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{K}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

Genom att inverstransformera detta uttryck får vi processens utsignal

$$y(t) = \begin{cases} K\left(1 - \dfrac{T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2}\right) & T_1 \neq T_2 \\ K\left(1 - e^{-t/T} - \dfrac{t}{T}e^{-t/T}\right) & T_1 = T_2 = T \end{cases}$$

I det första uttrycket ser vi att då den ena tidskonstanten är mycket mindre än den andra kommer stegsvaret att närma sig det för en första ordningens process som vi fick fram i exempel 3.1. Då t.ex. $T_1 \gg T_2$ får man ett stesvar som liknar det i exempel 3.1 med $T \approx T_1$. Om någon pol ligger i högra halvplanet är processen instabil och $y(t)$ växer obegränsat. Vi förutsätter att båda polerna ligger i vänstra halvplanet, det vill säga att $T_1 > 0$ och $T_2 > 0$.

I figur 3.4 visas processens stegsvar då $T_1 = T_2 = T$. Precis som i det förra exemplet ser vi att stegsvaret blir snabbare ju längre in i vänstra halvplanet polerna ligger.

I detta exempel ger slutvärdesteoremet

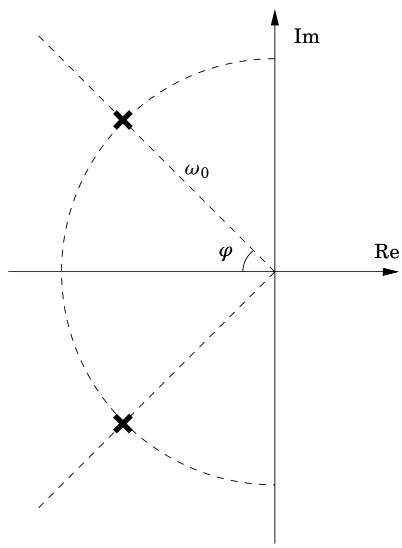
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sK}{s(1+sT_1)(1+sT_2)} = K$$

Slutvärdesteoremet säger att processens utsignal går mot $y = K$ då $t \to \infty$.

Begynnelsevärdesteoremet applicerat på $\dot{y}(t)$ ger

$$\lim_{t\to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2 K}{s(1+sT_1)(1+sT_2)} = 0$$

Tidsderivatan är alltså noll, vilket också framgår av figur 3.4. Det är lätt att övertyga sig om att tidsderivatan är noll för alla system där antalet poler minus antalet nollställen är större än ett. □



Figur 3.5 Tolkning av parametrarna i polynomet $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$. Frekvensen ω_0 betecknar polernas avstånd från origo och relativa dämpningen ges av $\zeta = \cos\varphi$.

EXEMPEL 3.3—ANDRA ORDNINGENS SYSTEM, KOMPLEXA POLER
För ett andra ordningens system med komplexa poler är det ofta bekvämt att skriva överföringsfunktionen som

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \qquad 0 < \zeta < 1$$

Betydelsen av parametrarna ω_0 och ζ framgår av figur 3.5. Parametern ω_0 betecknar polernas avstånd från origo. Parametern ζ kallas för relativa dämpningen och är kopplad till vinkeln φ i figur 3.5 genom

$$\zeta = \cos\varphi$$

Relativa dämpningen ζ anger relationen mellan real- och imaginärdelen.

Om insignalen till processen är ett enhetssteg blir Laplacetransformen av processens utsignal

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{K\omega_0^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)}$$

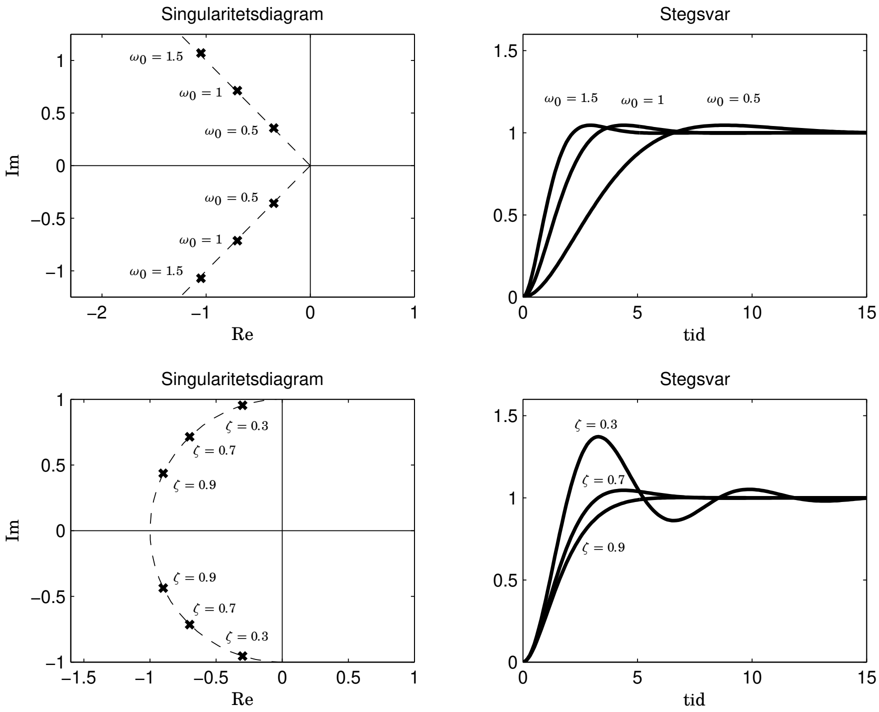
Genom att inverstransformera detta uttryck får vi processens utsignal

$$y(t) = K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \arccos\zeta\right)\right) \qquad 0 < \zeta < 1$$

I uttrycket ingår en term bestående av en sinussignal med en amplitud som avtar med tiden. Stegsvaret kommer därför att innehålla en komponent som består av en dämpad sinussignal.

I figur 3.6 visas processens stegsvar för några olika värden på ζ och ω_0. Parametern ω_0 bestämmer polernas avstånd från origo. Precis som i de föregående exemplen blir stegsvaret snabbare ju längre in i vänstra halvplanet polerna ligger. Vi ser också att stegsvarets form inte ändras så länge ζ är konstant.

Parametern ζ bestämmer förhållandet mellan real- och imaginärdelen för polerna. I figur 3.6 framgår att ju mindre ζ är desto större är imaginärdelen i förhållande till realdelen. Av figuren framgår också att ju mindre ζ är desto sämre dämpat är stegsvaret. Vi ser också att initialskedet i stegsvaren är ungefär desamma och att snabbheten är ungefär densamma så länge ω_0 är konstant.



Figur 3.6 Polernas placering och stegsvaret för processen $G(s) = K/(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)$ då $K = 1$. De två övre diagrammen visar fallet då $\zeta = 0.7$ och $\omega_0 = 0.5$, 1 och 1.5. De två undre diagrammen visar fallet då $\omega_0 = 1$ och $\zeta = 0.3$, 0.7 och 0.9.

I detta exemplet ger slutvärdesteoremet

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sK\omega_0^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)} = K$$

Slutvärdesteoremet säger att processens utsignal går mot $y = K$ då $t \to \infty$. Detta framgår av figur 3.6.

Begynnelsevärdesteoremet applicerat på $\dot{y}(t)$ ger

$$\lim_{t\to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2 K\omega_0^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)} = 0$$

På samma sätt i fallet med reella poler i föregående exempel är tidsderivatan noll i detta andra ordningens exempel. □

Föreläsning 4

Frekvenssvarsanalys

I detta kapitel beskrivs ytterligare sätt att beskriva processens dynamik, nämligen modeller som bygger på frekvenssvar. Dessa modeller åskådliggörs normalt grafiskt. Vi går igenom två grafiska beskrivningar av frekvenssvaren - Bodediagrammet och Nyquistdiagrammet. Kapitlet och modellbyggnadsdelen i kursen avslutas med några exempel på samband mellan de olika processmodeller som tagits upp i kursen.

4.1 Frekvenssvar

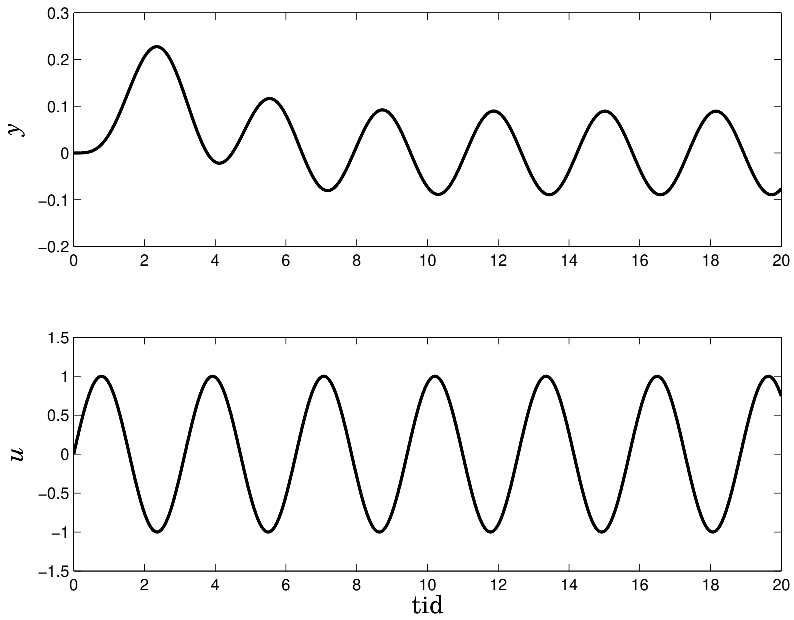
I figur 4.1 visas ett frekvenssvar, dvs utsignalen y från en process då insignalen u är en sinussignal. I figuren ser vi att utsignalen efter en transient blir en sinussignal med samma frekvens som insignalen. Det enda som skiljer de två signalerna åt efter inledningstransienterna är att de har olika amplituder och att de är fasförskjutna i förhållande till varandra. Vi ska nu räkna ut att detta alltid gäller.

Antag att styrsignalen ges av en sinussignal med frekvensen ω, det vill säga

$$u(t) = \sin \omega t$$

Låt processen vi studerar ha överföringsfunktionen $G(s)$ och impulssvaret $h(t)$. Eftersom en impuls har Laplacetransformen 1 gäller då

$$G(s) = \mathcal{L}(h(t))(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} h(t) dt$$



Figur 4.1 Frekvenssvarsexperiment

Detta har vi nytta av när vi nu ska se vilken utsignal vi får då insignalen är en sinussignal. När transienterna dött ut, dvs då $t \to \infty$, får vi från ekvation (3.3)

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(t-\tau')u(\tau')d\tau' = [\tau = t-\tau'] = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t h(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau = \operatorname{Im}\int_0^t h(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau \\ &= \operatorname{Im}\int_0^t h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau e^{i\omega t} = [t\to\infty] = \operatorname{Im} G(i\omega)e^{i\omega t} \\ &= |G(i\omega)|\operatorname{Im} e^{i\arg G(i\omega)}e^{i\omega t} = |G(i\omega)|\sin(\omega t + \arg G(i\omega)) \end{aligned}$$

Det betyder att om styrsignalen ges av $u(t) = \sin(\omega t)$ så blir mätsignalen $y(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ där

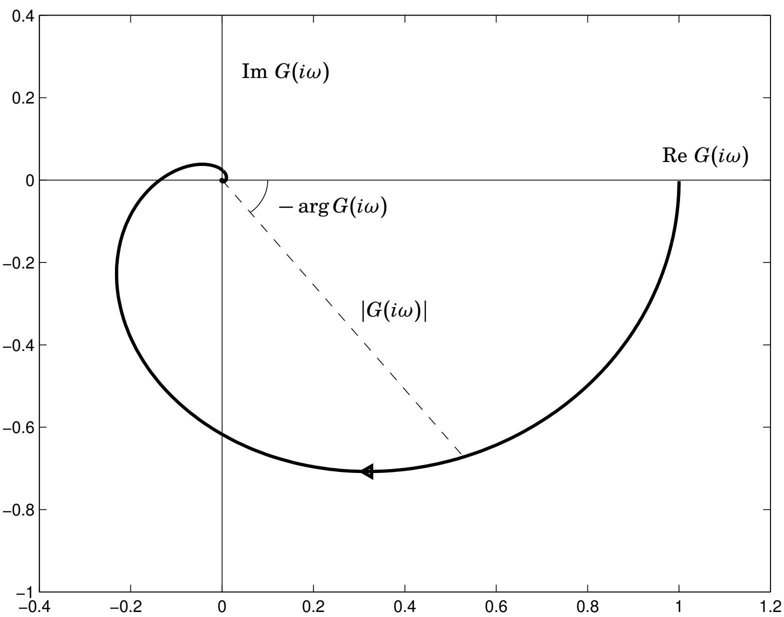
$$\begin{aligned} a &= |G(i\omega)| \\ \varphi &= \arg G(i\omega) \end{aligned}$$

Om vi gör en frekvensanalys, det vill säga låter styrsignalen vara en sinussignal med varierande frekvens och mäter amplituden och fasvridningen hos mätsignalen, kan vi alltså bestämma överföringsfunktionens värde för dessa frekvenser. Vi får en tabell, där vi för varje frekvens får överföringsfunktionens förstärkning och fas. En tabell är ett obekvämt sätt att representera processdynamik. Därför åskådliggör man tabellen grafiskt. Detta kan göras på flera sätt. Vi går igenom två sätt, Nyquistdiagrammet och Bodediagrammet.

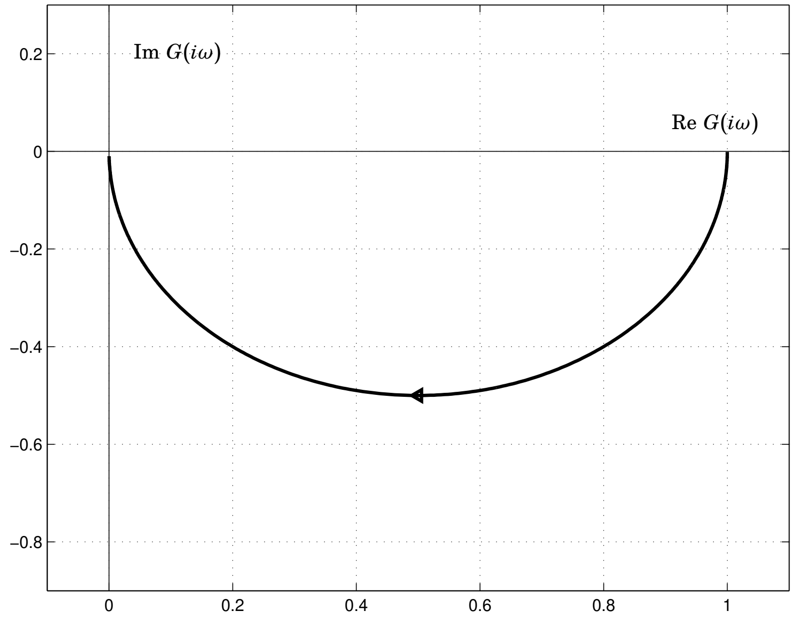
4.2 Nyquistdiagrammet

I Nyquistdiagrammet ritar man det komplexa talet $G(i\omega)$ för värden på ω i intervallet $[0, \infty]$ i det komplexa talplanet. I figur 4.2 visas en typisk Nyquistkurva för en process.

De flesta processer är av lågpasskaraktär. Det betyder att mätsignalen påverkas av lågfrekventa insignaler medan högfrekventa signaler dämpas ut. Eftersom



Figur 4.2 Nyquistdiagram



Figur 4.3 Nyquistkurvan i exempel 4.1

avståndet från origo till Nyquistkurvan beskriver processens förstärkning, kommer Nyquistkurvan därför oftast att dras in mot origo för höga frekvenser, som i figur 4.2. Fasvridningen mellan in- och utsignalerna brukar oftast också bli större när frekvensen ökar. Därför får man det spiralformade utseende som visas i figur 4.2.

Följande exempel visar hur man kan räkna ut Nyquistkurvans utseende om man känner överföringsfunktionen.

Exempel 4.1—Nyquistdiagramritning
Antag att processen ges av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Vi räknar ut $G(i\omega)$ och separerar real- och imaginärdelarna:

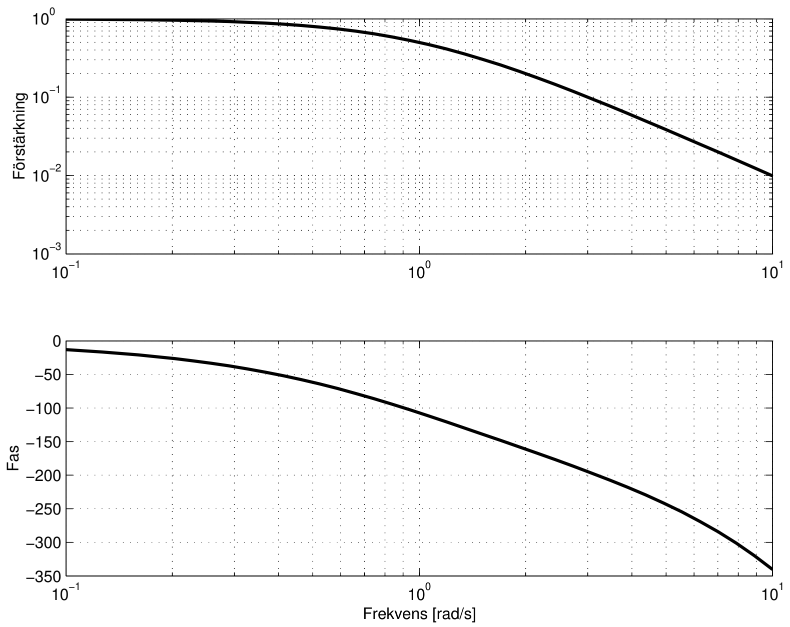
$$G(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1-i\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{1+\omega^2} - i\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

Vi ser att realdelen alltid är positiv och imaginärdelen alltid negativ. Nyquistkurvan kommer med andra ord att ligga i fjärde kvadranten. Vidare ser vi att $G(i\omega) \approx 1$ för små ω och att $G(i\omega) \to 0$ då $\omega \to \infty$. Nyquistkurvan visas i figur 4.3 □

4.3 Bodediagrammet

I Bodediagrammet ritar man två kurvor, $|G(i\omega)|$ respektive $\arg G(i\omega)$ som funktioner av ω. I figur 4.4 visas Bodediagrammet för en typisk process. Beloppet ritas i logaritmisk skala, medan argumentet ritas i en linjär skala. Frekvensaxeln är logaritmisk.

Bodediagrammet för en process ser ofta ut som i figur 4.4. För låga frekvenser har vi ofta en förstärkning som är konstant och svarar mot processens statiska förstärkning. Efterhand som frekvensen ökar minskar förstärkningen och fasvridningen ökar. Processen är med andra ord av lågpasskaraktär som vi sett tidigare. Det finns dock undantag som vi snart ska se.



Figur 4.4 Bodediagram

Bodediagrammet har en del egenskaper som gör det lättare att rita än Nyquist-diagrammet. Antag att vi kan dela upp överföringsfunktionen som en produkt av flera delöverföringsfunktioner, t.ex.

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$$

Det betyder att logaritmen av beloppet respektive argumentet ges av

$$\begin{aligned}\log|G(i\omega)| &= \log|G_1(i\omega)| + \log|G_2(i\omega)| + \log|G_3(i\omega)|\\ \arg G(i\omega) &= \arg G_1(i\omega) + \arg G_2(i\omega) + \arg G_3(i\omega)\end{aligned}$$

Detta innebär att Bodediagrammet för en överföringsfunktion ges av summan av Bodediagrammen för delöverföringsfunktionerna. Det innebär i sin tur att om man kan rita Bodediagrammet för vissa grundläggande typöverföringsfunktioner kan man rita Bodediagrammet för samtliga överföringsfunktioner som kan sättas samman som produkter av dessa. Vi ska gå igenom fem typöverföringsfunktioner som tillsammans täcker in alla de överföringsfunktioner vi kommer i kontakt med i denna kurs. Typöverföringsfunktionerna är:

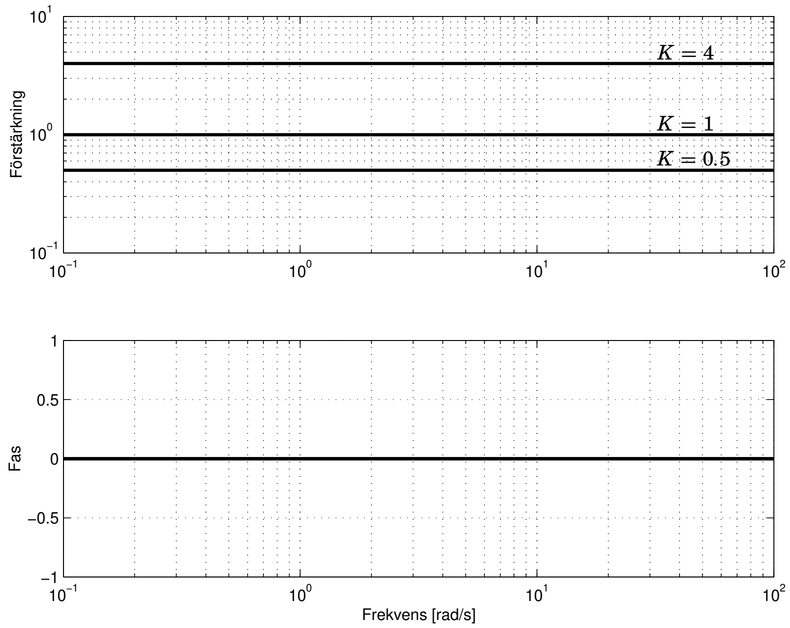
1. K
2. s^n
3. $(1 + sT)^n$
4. $\left(1 + 2\zeta s/\omega_0 + (s/\omega_0)^2\right)^n$
5. e^{-sL}

där K, T, ζ, ω_0 och L är reella tal och n ett heltal.

1. Bodediagram för $G(s) = K$

För överföringsfunktionen $G(s) = K$ ges belopp och argument av

$$\begin{aligned}\log|G(i\omega)| &= \log K\\ \arg G(i\omega) &= 0\end{aligned}$$



Figur 4.5 Bodediagram för $G(s) = K$, där $K = 0.5, 1$ och 4.

Både förstärkningen och argumentet är oberoende av ω. Bodedigrammet ges därför av horisontella linjer. Detta illustreras i figur 4.5 där Bodediagrammen för tre olika förstärkningar K visas.

2. Bodediagram för $G(s) = s^n$

För överföringsfunktionen $G(s) = s^n$ ges belopp och argument av

$$\log|G(i\omega)| = \log|i\omega|^n = n\log\omega$$
$$\arg G(i\omega) = n\arg(i\omega) = n\frac{\pi}{2}$$

Eftersom vi valt logaritmiska skalor blir beloppet en rät linje med lutningen n. Argumentet är oberoende av ω och bildar därför en horisontell linje. I figur 4.6 visas Bodediagrammen för tre olika val av n.

3. Bodediagram för $G(s) = (1 + sT)^n$

Överföringsfunktionen $G(s) = (1 + sT)^n$ har följande belopp och argument

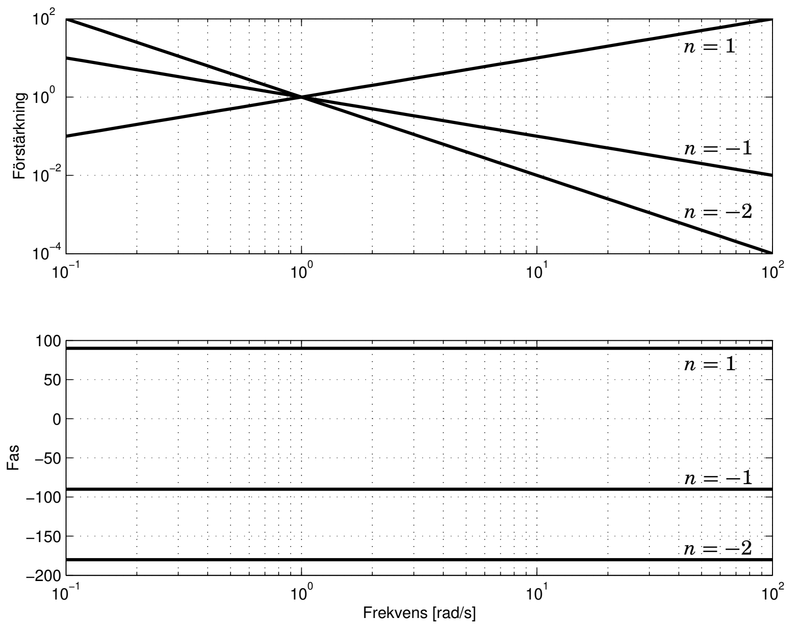
$$\log|G(i\omega)| = \log|1 + i\omega T|^n = n\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$$
$$\arg G(i\omega) = n\arg(1 + i\omega T) = n\arctan(\omega T)$$

För små värden på ω ges funktionerna av

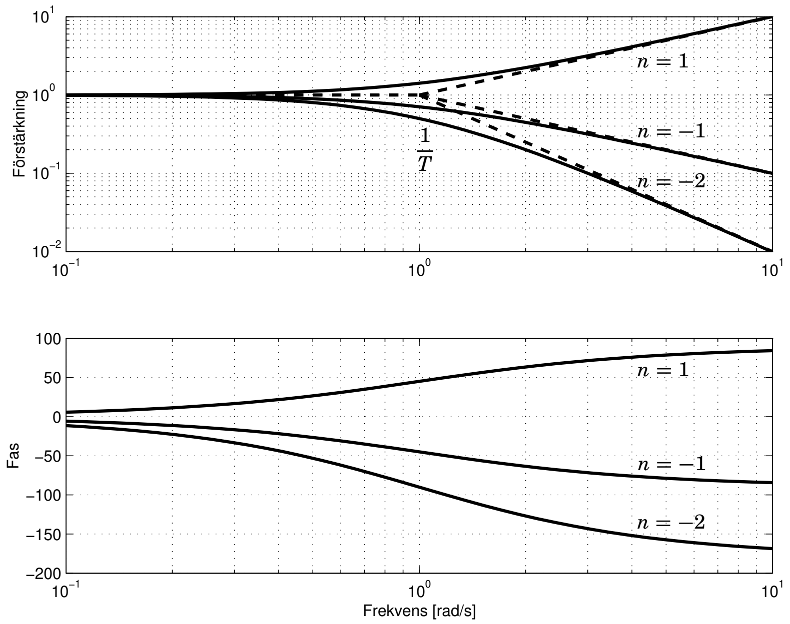
$$\log|G(i\omega)| \to 0$$
$$\arg G(i\omega) \to 0$$

För stora värden på ω ges funktionerna av

$$\log|G(i\omega)| \to n\log\omega T$$
$$\arg G(i\omega) \to n\frac{\pi}{2}$$



Figur 4.6 Bodediagram för $G(s) = s^n$, där $n = 1, -1$ och -2.



Figur 4.7 Bodediagram för $G(s) = (1 + sT)^n$, där $T = 1$ och $n = 1, -1$ och -2.

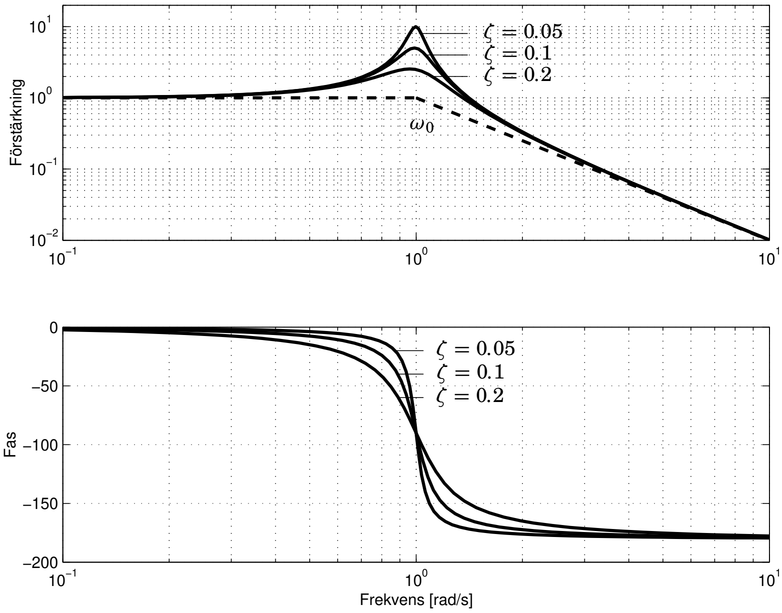
Dessa två asymptoter, lågfrekvensasymptoten och högfrekvensasymptoten, är ritade i figur 4.7 tillsammans med Bodediagrammen för några värden på n. Skärningen mellan de två asymptoterna i beloppdiagrammet ges av

$$\log \omega T = 0$$

Denna frekvens kallas brytfrekvensen och är $\omega = 1/T$.

4. Bodediagram för $G(s) = \left(1 + 2\zeta s/\omega_0 + (s/\omega_0)^2\right)^n$

För denna överföringsfunktion ges lågfrekvensasymptoten av $G(i\omega) \approx 1$, det vill



Figur 4.8 Bodediagram för $G(s) = \omega_0^2/(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)$, där $\omega_0 = 1$ och $\zeta = 0.05, 0.1$ och 0.2.

säga

$$\log|G(i\omega)| \to 0$$
$$\arg G(i\omega) \to 0$$

och för stora ω ges högfrekvensasymptoten av $G(i\omega) \approx (i\omega/\omega_0)^{2n} = (-1)^n(\omega/\omega_0)^{2n}$, det vill säga

$$\log|G(i\omega)| \to 2n \log \frac{\omega}{\omega_0}$$
$$\arg G(i\omega) \to n\pi$$

I figur 4.8 visas Bodediagrammen för några olika val av parametern ζ. Om $\zeta < 1/\sqrt{2}$ blir det en resonanstopp i närheten av frekvensen ω_0. Resonanstoppens storlek ökar då ζ minskar.

5. Bodediagram för $G(s) = e^{-sL}$

Denna överföringsfunktion beskriver en ren dödtid eller tidsfördröjning. Det betyder att utsignalen är identisk med insignalen bortsett från att den är fördröjd med tiden L, $y(t) = u(t - L)$. Skickar man en sinussignal genom en sådan process får man tillbaka en sinussignal med samma amplitud, men med en fasvridning som blir förhållandevis större ju högre frekvens man har. Vi ska se att så är fallet.

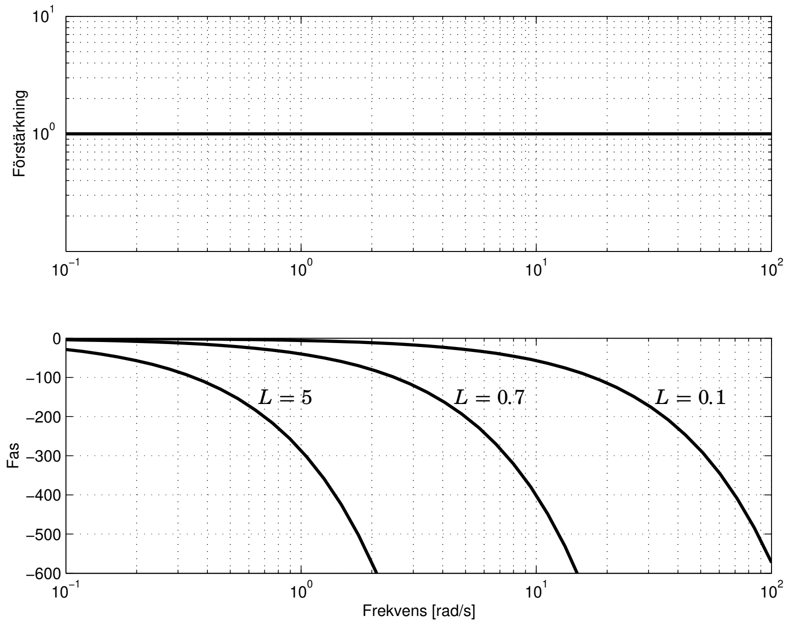
För överföringsfunktionen $G(s) = e^{-sL}$ blir beloppet och argumentet

$$\log|G(i\omega)| = \log|e^{-i\omega L}| = 0$$
$$\arg G(i\omega) = \arg e^{-i\omega L} = -\omega L$$

I figur 4.9 visas Bodediagrammen för några olika val av dödtiden L.

Bodediagramritning för sammansatt överföringsfunktion

Vi ska avslutningsvis se hur man kan rita ett Bodediagram för en högre ordningens överföringsfunktion genom att dela upp den i faktorer som består av de fem typöverföringsfunktionerna.



Figur 4.9 Bodediagram för $G(s) = e^{-Ls}$ för $L = 5, 0.7$ och 0.1

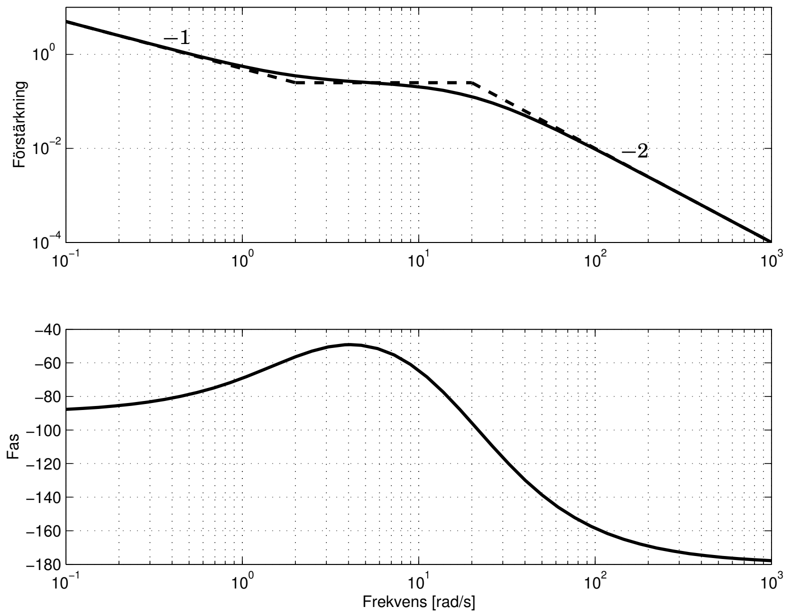
EXEMPEL 4.2—BODEDIAGRAMRITNING

Vi vill rita Bodediagrammet för överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+20)^2}$$

Bodediagrammet med asymptoter visas i figur 4.10. Om man ska rita Bodediagrammet för hand blir första steget att dela upp överföringsfunktionen och skriva den som en produkt av de typöverföringsfunktioner vi tidigare studerat.

$$G(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+20)^2} = 0.5 \cdot s^{-1} \cdot (1 + 0.5s) \cdot (1 + 0.05s)^{-2}$$



Figur 4.10 Bodediagram för $G(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+20)^2}$

För små ω kommer de två delöverföringsfunktionerna längst till höger att bli ungefär ett. Resterande delar bildar lågfrekvensasymptoten

$$G(s) \to \frac{0.5}{s}$$

Vi börjar med att rita beloppkurvan. Lågfrekvensasymptoten är en rät linje med lutningen -1. Linjens placering i vertikal led bestämmer vi genom att stoppa in ett värde på $s = i\omega$. Vi ser t.ex. att för $\omega = 1$ blir $|G(i\omega)| = 0.5$.

Överföringsfunktionen har två brytfrekvenser. Vid $\omega = 2$ bryter kurvan upp ett steg på grund av nollstället och vi får en asymptot med lutningen 0. Vid $\omega = 20$ bryter kurvan ner två steg och asymptoten får lutningen -2. Högfrekvensäsymptoten är

$$G(s) \to \frac{100}{s^2}$$

I figur 4.10 ser vi asymptoterna och den detaljerade kurvan.

Faskurvan börjar vid $-90°$ eftersom lågfrekvensasymptoten är en integrator, $G(s) = 0.5/s$. Hade processen enbart bestått av denna integrator hade fasen förblivit $-90°$ för alla frekvenser. Nu kommer det först en brytpunkt vid $\omega = 2$. Denna gör att fasen ökar. Om det inte funnits ytterligare dynamik hade fasen ökat till $0°$ för höga frekvenser. Vid $\omega = 20$ bryter vi dock ner med lutningen -2. Detta gör att faskurvan vänder neråt och går mot $-180°$ för höga frekvenser. □

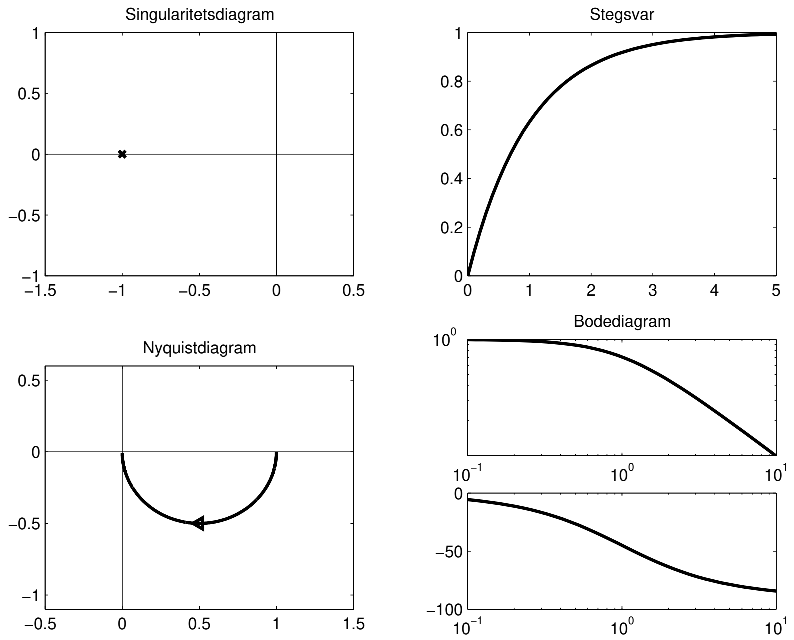
4.4 Samband mellan modellbeskrivningar

Vi har nu gått igenom flera olika sätt att representera dynamik: Tillståndsbeskrivning, Bode- och Nyquistdiagram, steg- och impulssvar och överföringsfunktionen. Vi ska avsluta modellbyggnadsdelen med att visa sambandet mellan dessa representationer för några processtyper.

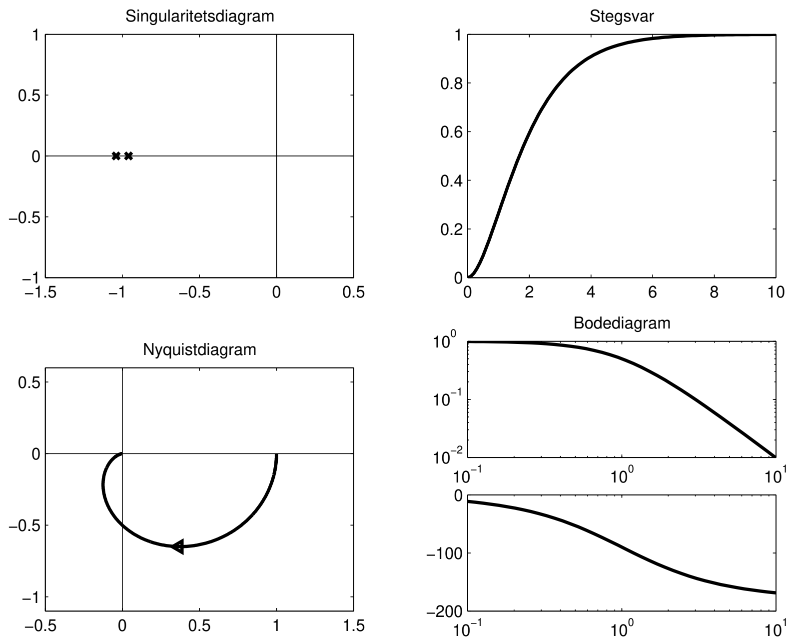
Enkapacitiva processer I figur 4.11 visas singularitetsdiagrammet (poler och nollställen), stegsvaret, Nyquistkurvan och Bodediagrammet för en enkapacitiv eller första ordningens process. Detta är en processtyp med enkel dynamik som är lätt att reglera. Om vi t.ex. tänker oss en kvicksilvertermometer med mycket tunn glasvägg som sänks ner i kokande vatten, får vi ett svar i kvicksilverpelaren som har utseendet motsvarande en enkapacitiv process.

Flerkapacitiva processer I figur 4.12 visas modellbeskrivningar för en flerkapacitiv process, i detta fallet en andra ordningens process. Detta är en mycket vanlig processtyp. Låt oss göra ett motsvarande experiment som för den enkapacitiva processen, men nu med den skillnaden att vi stoppar ner termometern i kallt vatten. Behållaren med kallt vatten placerar vi därefter på en het värmeplatta. Vattentemperaturen kommer nu att stiga med ett förlopp som svarar mot den enkapacitiva processen, medan termometern får ett svar som har utseendet motsvarande den flerkapacitiva processen. Skillnaden är att vi nu har flera ”kapacitanser” som skall upphettas. Skillnaden mellan den enkapacitiva och den flerkapacitiva processen blir större ju fler kapacitanser man har. Om t.ex. kvicksilvertermometerns glasvägg är tjock eller om värmeplattan från början är kall får vi ytterligare kapacitanser att upphetta.

Integrerande processer I figur 4.13 visas modellbeskrivningar för en integrerande process. Om processen är integrerande kommer stegsvaret inte att konvergera mot någon ny stationär nivå, utan mätsignalen växer linjärt. Exempel på sådana processer är nivåreglering i tankar, tryckreglering i slutna kärl, koncentrationsreglering i behållare utan utflöde och temperaturreglering i välisolerade ugnar. Om man t.ex. öppnar ventilen för tillflödet till en tank kommer nivån att växa linjärt



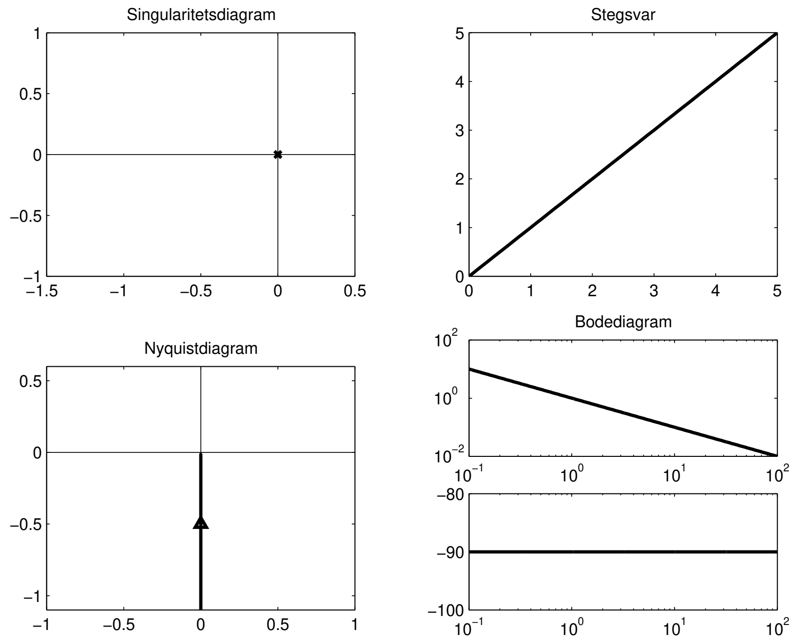
Figur 4.11 Olika modellbeskrivningar för en enkapacitiv process, $G(s) = 1/(s+1)$



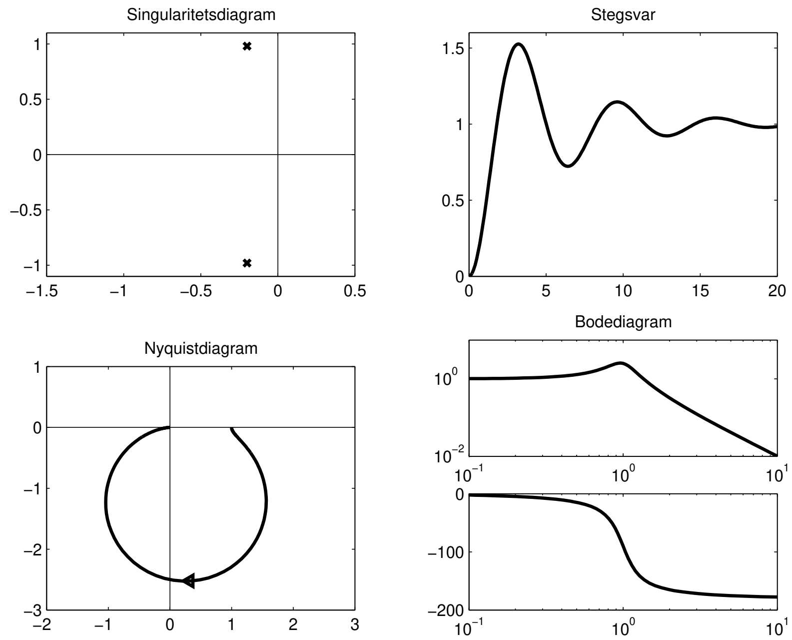
Figur 4.12 Olika modellbeskrivningar för en flerkapacitiv process, $G(s) = 1/(s+1)^2$

förutsatt att utflödet inte ändras. Gemensamt för alla dessa processer är att det sker någon form av upplagring i dem. I nivå-, tryck- och koncentrationsreglerfallet sker en upplagring av massa, i temperaturreglerfallet sker en upplagring av energi.

Oscillativa processer I figur 4.14 visas modellbeskrivningar för oscillativa processer. Dessa processer har komplexa poler. Denna processtyp karaktäriseras av att stegsvaret svänger runt sitt slutliga stationära värde. Oscillativa processer uppkommer framför allt vid mekaniska konstruktioner då man använder elastiska material, t.ex. veka axlar i servon, fjäderkonstruktioner etc.



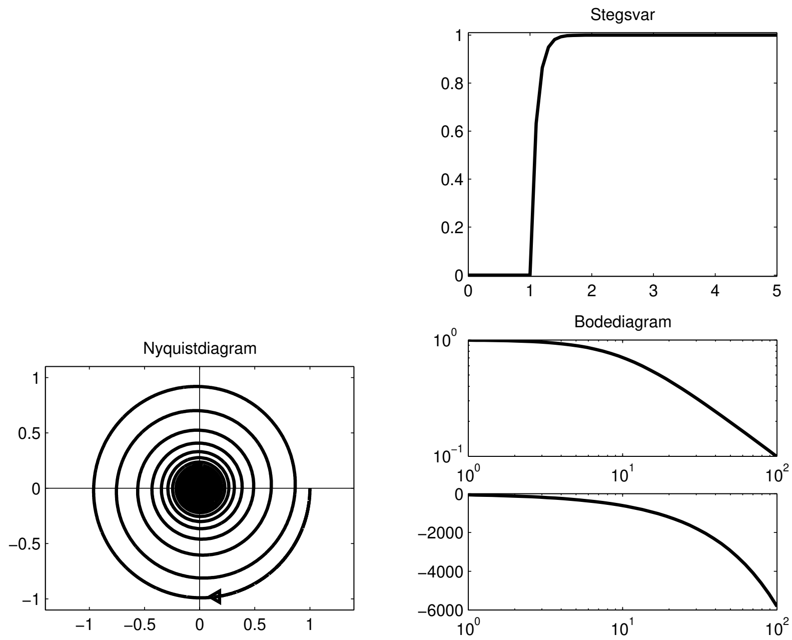
Figur 4.13 Olika modellbeskrivningar för en integrerande process, $G(s) = 1/s$



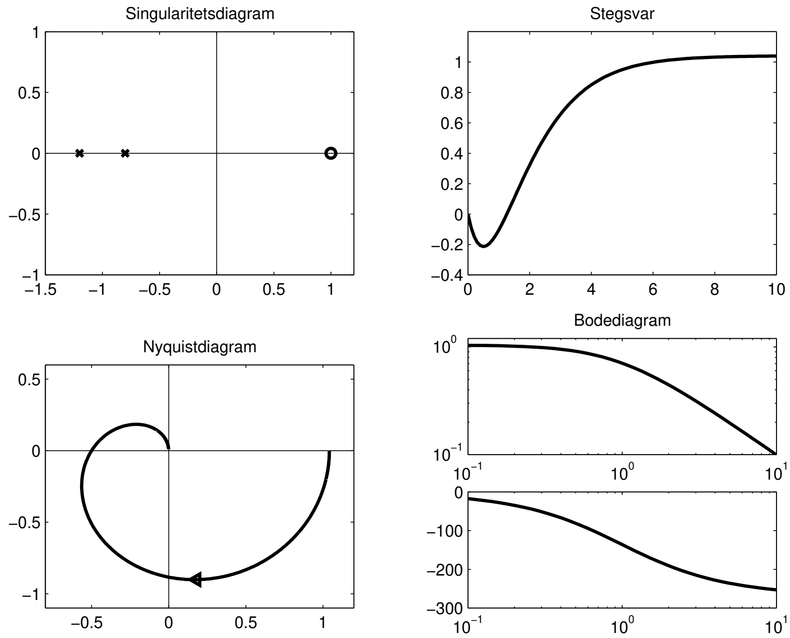
Figur 4.14 Olika modellbeskrivningar för en oscillativ process, $G(s) = 1/(s^2 + 0.4s + 1)$

Dödtidsprocesser I figur 4.15 visas modellbeskrivningar för en process med lång dödtid, i detta fallet en process med en dödtid på en sekund och en tidskonstant på 0.1 sekunder. I figur 4.15 finns det inget singularitetsdiagram, eftersom dödtiden inte kan representeras i ett sådant diagram. Dödtidsprocesser kan inte heller beskrivas med tillståndsbeskrivningen.

Dödtider uppkommer oftast vid materialtransporter i rör eller på band. Om vi t.ex. mäter pH i en vätska som transporteras i ett rör, där tillsatsen av det ämne vi vill mäta koncentrationen av sker en lång bit uppströms i förhållande till givaren, uppkommer en dödtid som motsvarar tiden det tar för vätskan att transporteras mellan tillförseln och givaren. En annan process som är allmänt känd



Figur 4.15 Olika modellbeskrivningar för en dödtidsprocess, $G(s) = e^{-s}/(0.1s + 1)$



Figur 4.16 Olika modellbeskrivningar för en process med omvänt svar, $G(s) = (1 - s)/((s + 0.8)(s + 1.2))$

är temperaturregleringen i en dusch. Eftersom en ändring i blandningen mellan kallvatten och varmvatten inte märks förrän vattnet har transporterats genom duschslangen får vi en dödtid som svarar mot denna tid.

Processer med omvänt svar I figur 4.16 visas modellbeskrivningar för en process med omvänt svar, det vill säga en process där stegsvaret till en början går åt ”fel” håll. Typiskt för dessa processer är att de har nollställen i högra halvplanet. Detta ska vi undersöka närmare längre fram i kursen. Dessa processer är relativt svåra att reglera.

Den vanligaste processen med omvänt svar inom processindustrin uppkommer vid nivåreglering av domnivån i ångpannor. Om man t.ex. vill höja nivån i ångdomen genom att öka vattenflödet in till domen blir den första reaktionen att vattnet i domen avkyls. Eftersom ångbubblor i vattnet då försvinner blir följden att nivån sjunker. Först efter en stund, när vattnet har värmts upp igen, kommer nivån att stiga till en högre nivå. Ett annat exempel på en process med omvänt svar är en bil som backas. Om vi ska fickparkera en bil svänger bilens tyngdpunkt först ut i fel riktning innan vi får den dit vi vill.

Föreläsning 5

Återkoppling och Stabilitet

Vi lämnar nu processmodelleringen och övergår till analysdelen i kursen. Först introduceras återkopplingens egenskaper genom ett exempel. Det exempel vi valt är reglering av ångmaskiner. Ett grundläggande krav på regleringen är att vi lyckas hålla den process vi ska reglera stabil. Vi definierar stabilitetsbegreppet och visar därefter ett antal metoder för att avgöra om en reglerkrets är stabil.

5.1 Återkoppling – Ångmaskinen

Ångmaskinen är ett av de första exemplen på reglertekniska tillämpningar. Målet med regleringen är att hålla varvtalet hos ångmaskinen konstant trots att lasten varierar. Om man t.ex. låter ångmaskinen driva en såg vill man att varvtalet ska hållas konstant även då man stoppar en stock i sågen.

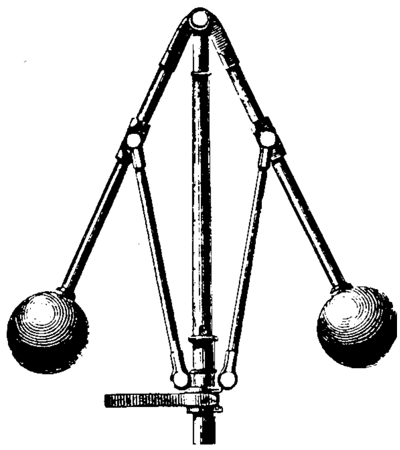
För att kunna reglera ångmaskinen måste man på något sätt mäta varvtalet. Detta gjorde man med hjälp av en mekanism som illustreras i figur 5.1.

När varvtalet ökar drivs de två kulorna utåt av centrifugalkraften. Hylsans läge är därför ett mått på varvtalet. Denna lät man styra en ventil som bestämde ånguttaget. Konstruktionen kallas därför för centrifugalregulatorn.

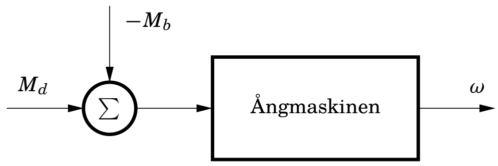
Den oreglerade ångmaskinen

Vi börjar med att undersöka den oreglerade processen, det vill säga själva ångmaskinen. I figur 5.2 visas blockschemat för processen. Vi kallar detta för ett öppet system.

Utsignalen är varvtalet ω som vi vill hålla konstant. Två moment påverkar varvtalet. Det drivande momentet M_d bestämmer vi själva genom att variera ånguttaget från ångmaskinen. Vi har dessutom ett belastningsmoment M_b vars storlek bestäms av hur stor last ångmaskinen utsätts för.



Figur 5.1 Mätningen av vinkelhastigheten i centrifugalregulatorn



Figur 5.2 Blockschema för den oreglerade ångmaskinen.

En enkel matematisk modell för ångmaskinen fås ur momentekvationen:

$$J\dot{\omega} + D\omega = M_d - M_b \tag{5.1}$$

där J är tröghetsmomentet och D en dämpningskoefficient.

Det stationära varvtalet ω_s, dvs varvtalet då ångmaskinen går med konstant varvtal och momenten är konstanta, får vi genom att sätta $\dot{\omega} = 0$:

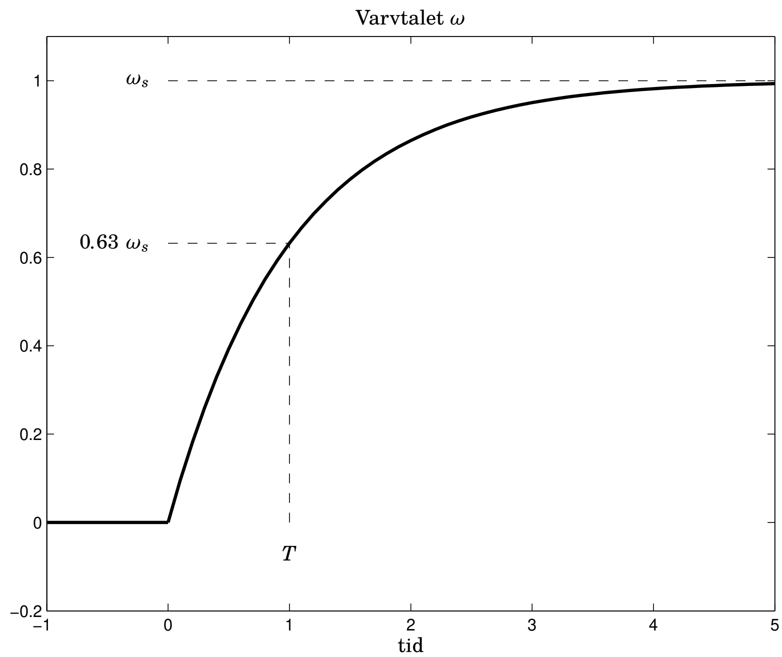
$$\omega_s = \frac{M_d - M_b}{D}$$

Vi ser att vi kan bestämma varvtalet genom att välja det drivande momentet M_d lämpligt, men att det kommer att variera om lasten M_b eller dämpningen D varierar. Den oreglerade ångmaskinen är därför känslig för såväl lastvariationer som processvariationer.

Det dynamiska förloppet kan vi analysera genom att lösa differentialekvationen (5.1). Om vi antar att ångmaskinen från början är stillastående, dvs $\omega = 0$, och startas vid tidpunkten $t = 0$ ges varvtalet av

$$\omega(t) = \frac{M_d - M_b}{D}\left(1 - e^{-Dt/J}\right) = \omega_s\left(1 - e^{-Dt/J}\right)$$

Stegsvaret visas i figur 5.3. Systemet svänger in sig mot den stationära lösningen med tidskonstanten $T = J/D$. Stigtiden är ett annat mått som anger hur



Figur 5.3 Stegsvaret för den oreglerade ångmaskinen. Processparametrarna är $J = D = 1$. Tiden T är processens tidskonstant.

snabbt stegsvaret är. Stigtiden definieras på olika sätt. En definition är inversen på mätsignalens maximala tidsderivata. Andra definitioner är tiden det tar för mätsignalen att gå mellan 5% och 95%, alternativt mellan 10% och 90%. Ett annat namn för stigtiden är lösningstiden.

P-reglering av ångmaskinen

Låt oss nu reglera ångmaskinen enligt figur 5.4. Vi kallar detta för ett slutet system. Vi börjar med att studera en P-regulator och låter det drivande momentet ges av

$$M_d = K(\omega_r - \omega)$$

där ω_r är referensvärdet för varvtalet och K är regulatorns förstärkning. Om vi kopplar denna regulator till processen i ekvation (5.1) får vi ekvationen för det återkopplade systemet

$$J\dot{\omega} + D\omega = K(\omega_r - \omega) - M_b$$

det vill säga

$$J\dot{\omega} + (D+K)\omega = K\omega_r - M_b \tag{5.2}$$

Stationärt, det vill säga då $\dot{\omega} = 0$, gäller att

$$\omega_s = \frac{K}{D+K}\omega_r - \frac{1}{D+K}M_b$$

Genom att välja regulatorförstärkningen K hög kan vi hålla varvtalet ω nära referensvarvtalet ω_r. Vi ser också att återkopplingen gör att varvtalet blir mindre känsligt för variationer i såväl lasten M_b som processparametern D.

För att studera det dynamiska förloppet kan vi lösa ekvation (5.2). Om vi startar från viloläget $\omega = 0$ blir lösningen

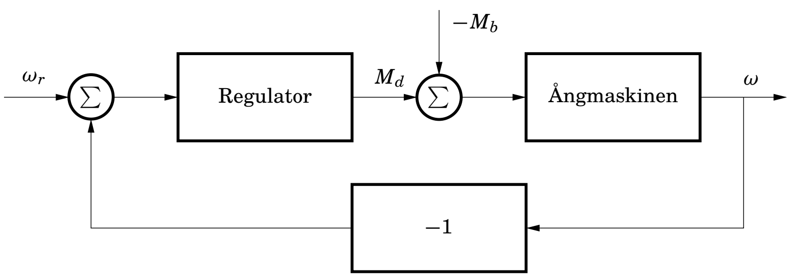
$$\omega(t) = \frac{K\omega_r - M_b}{D+K}\left(1 - e^{-(D+K)t/J}\right) = \omega_s\left(1 - e^{-(D+K)t/J}\right)$$

Tidskonstanten är $T = J/(D+K)$. Hög förstärkning K ger därför också ett snabbare insvängningsförlopp än i det oreglerade fallet. I figur 5.5 visas insvängningsförloppen vid laststörningar för några olika val av K. (I figurerna 5.5 och 5.6 antar varvtalen negativa värden. Det betyder inte att ångmaskinen går baklänges, utan beror enbart på att vi studerar avvikelser från jämviktsläget som vi för enkelhets skull satt till $\omega = 0$.) Sammanfattningsvis kan vi alltså konstatera att återkopplingen gett oss ett snabbare system som är mindre känsligt för processvariationer och lastvariationer.

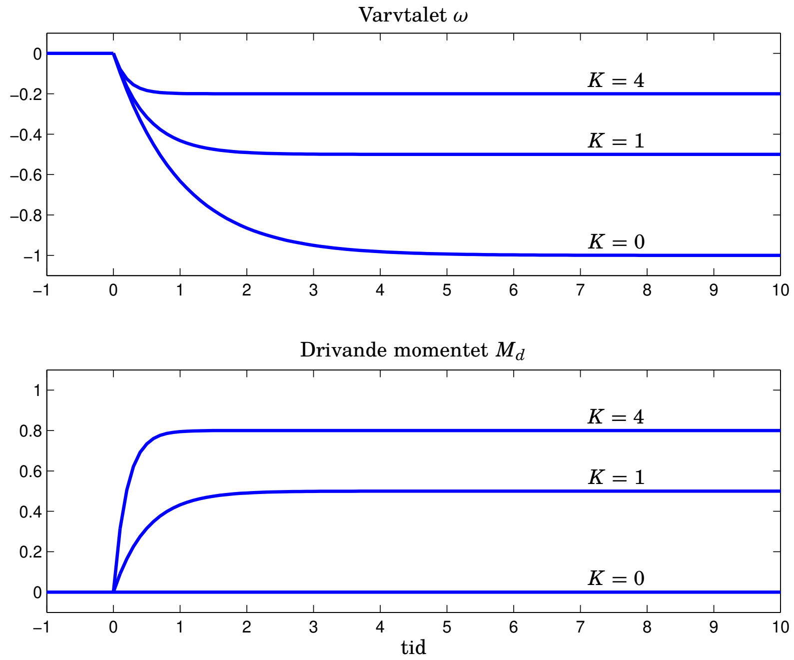
PI-reglering av ångmaskinen

Även om reglering med P-regulatorn gav förbättrade egenskaper hos ångmaskinen har vi fortfarande problemet att det stationära varvtalet inte överensstämmer med det önskade ω_r. Därför inför vi nu en PI-regulator:

$$M_d = K(\omega_r - \omega) + \frac{K}{T_i}\int_0^t (\omega_r - \omega)dt$$



Figur 5.4 Blockschema för den reglerade ångmaskinen.



Figur 5.5 P-reglering av ångmaskinen med förstärkningarna $K = 0, 1$ och 4. Fallet $K = 0$ svarar mot det oreglerade öppna systemet. Processparametrarna är $J = D = 1$.

där T_i är regulatorns integraltid. Kopplar vi ihop denna regulator med processen i ekvation (5.1) får vi ekvationen

$$J\dot{\omega} + D\omega = K(\omega_r - \omega) + \frac{K}{T_i}\int_0^t (\omega_r - \omega)dt - M_b$$

Genom att derivera ekvationen blir vi av med integralen och får en ren differentialekvation

$$J\ddot{\omega} + (D + K)\dot{\omega} + \frac{K}{T_i}\omega = K\dot{\omega}_r + \frac{K}{T_i}\omega_r - \dot{M}_b$$

Om vi antar att både referensvärdet för varvtalet och belastningen är konstanta gäller att $\dot{\omega}_r = \dot{M}_b = 0$. Då får vi det stationära varvtalet

$$\omega_s = \omega_r$$

Stationärt får vi alltså rätt varvtal då vi reglerar med en PI-regulator. Detta syns i figur 5.6 som visar regleringen vid laststörningar för några olika val av regulatorparametrar. I figuren ser vi också att de dynamiska förloppen är mer komplicerade än tidigare. Slutna systemets karakteristiska ekvation ges av

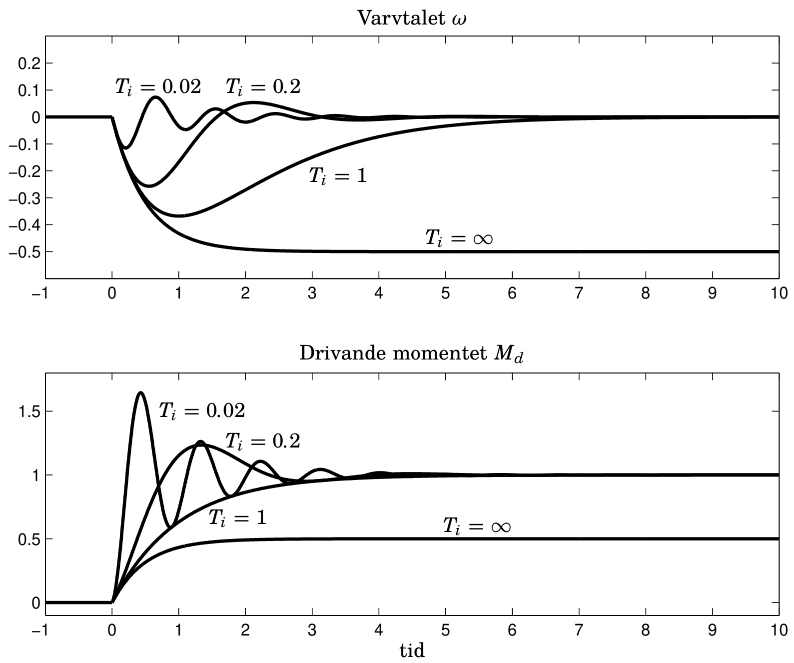
$$Js^2 + (D + K)s + \frac{K}{T_i} = 0$$

det vill säga

$$s^2 + \frac{D + K}{J}s + \frac{K}{JT_i} = 0 \tag{5.3}$$

Vid P-regleringen hade det slutna systemet bara en reell pol. Läget på denna pol flyttades när vi ändrade regulatorförstärkningen K och regleringen blev bättre ju högre förstärkning vi valde. I praktiken har vi dock alltid högre ordningens dynamik och alltför höga förstärkningar leder till dålig reglering.

Vid PI-reglering har vi ett andra ordningens system med två poler. Dessa kan vara både reella och komplexa. Vi ser i ekvation (5.3) att vi genom att välja regulatorparametrarna K och T_i kan välja ett godtyckligt karaktäristiskt polynom och



Figur 5.6 PI-reglering av ångmaskinen med förstärkningen $K = 1$ och integraltiderna $T_i = 0.02, 0.2, 1$ och ∞. Fallet $T_i = \infty$ svarar mot P-reglering. Processparametrarna är $J = D = 1$.

därmed godtyckliga poler. Detta kallas för polplacering. I figur 5.6 ser vi att alltför kort integraltid T_i leder till svängningar och stabilitetsproblem. I kommande föreläsningar ska vi diskutera hur man ska välja regulatorparametrar för att uppfylla specifikationer på slutna systemets uppförande.

Sammanfattning

Detta inledande exempel har visat oss några viktiga egenskaper hos återkoppling. Återkopplingen ger oss stora fördelar. Vi kan hålla den reglerade variabeln närmare det önskade värdet genom att systemet blir mindre känsligt för processvariationer och belastningsvariationer. Vi kan också påverka snabbheten hos systemet, så att vi får snabbare insvängningsförlopp vid störningar och ändringar i referensvärdet.

Vi har också sett att vi kan få mycket varierande insvängningsförlopp och att det därför är viktigt hur man via regulatorn väljer dynamiken hos det slutna systemet. Detta ska vi behandla närmare under resten av kursen.

5.2 Stabilitet - definitioner

Ett grundläggande krav på regleringen är att vi lyckas hålla den process vi ska reglera stabil. Vi inleder med att definiera stabilitetsbegreppet och går därefter igenom några olika metoder för att avgöra stabilitet. För enkelhets skull ger vi definitionerna för processens dynamik, men de är generella och gäller även för den slutna reglerkretsen.

För definitionerna väljer vi att betrakta processens dynamik på tillståndsform, det vill säga

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Asymptotisk stabilitet: Ett linjärt dynamiskt system är asymptotiskt stabilt om $x(t) \to 0$ då $t \to \infty$ för alla initialtillstånd då $u(t) = 0$.

Vi betraktar här avvikelser från ett jämviktsläge. Det betyder att $u(t) = 0$ svarar mot tillståndet $x(t) = 0$. Definitionen säger att oavsett vilka initialvärden våra tillstånd har så kommer de att återgå till jämviktsläget. Observera att stabilitetsbegreppet inte har något med vare sig styrsignalen eller mätsignalen att göra. Stabilitet är en egenskap hos systemet självt, inte hur vi påverkar det eller mäter dess egenskaper.

> **Stabilitet:** Ett linjärt dynamiskt system är stabilt om $x(t)$ är begränsad för alla initialtillstånd då $u(t) = 0$.

Denna definition är svagare än definitionen på asymptotisk stabilitet, vilket innebär att ett asymptotiskt stabilt system också är stabilt. Vi kräver nu inte längre att tillståndet ska återgå till jämviktsläget utan bara att det ska hålla sig inom ett begränsat avstånd från jämviktsläget.

> **Instabilitet:** Ett linjärt dynamiskt system är instabilt om det finns något initialtillstånd som ger ett obegränsat tillstånd $x(t)$ då $u(t) = 0$.

Exempel 5.1—Stabilitet i det skalära fallet

Vi undersöker först stabilitetsbegreppet i det skalära fallet då vi bara har ett tillstånd. Eftersom $u(t) = 0$ i definitionerna och mätsignalen är ointressant räcker det att studera ekvationen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t)\\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Denna ekvation har lösningen

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

Vi får tre fall beroende på tecknet på a.

$a < 0$	Asymptotiskt stabilt
$a = 0$	Stabilt
$a > 0$	Instabilt

I figur 5.7 visas svaren för de tre fallen. □

I det skalära fallet avgör med andra ord tecknet på a stabiliteten.

Exempel 5.2—Stabilitet i det diagonala fallet

Vi undersöker nu stabilitetsbegreppet i fallet då matrisen A är diagonal, det vill säga då tillståndsekvationerna ges av

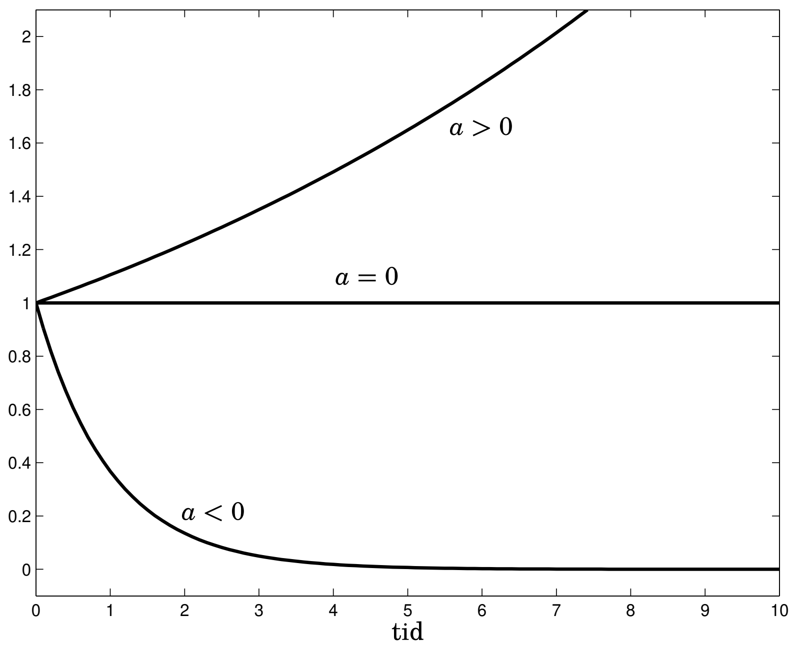
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\end{pmatrix} x(t) = Ax(t)\\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Eftersom varje tillstånd har en ekvation som överensstämmer med det skalära fallet

$$\dot{x}_i(t) = a_i x_i(t)$$

där a_i är egenvärden till A-matrisen, är det tecknen på egenvärdena som avgör stabiliteten. Vi får följande fall:

1. Om alla egenvärden till A-matrisen har negativ realdel är systemet asymptotiskt stabilt.



Figur 5.7 Lösningar vid olika val av parametern a i Exempel 5.1 då $x_0 = 1$

2. Om något egenvärde till A-matrisen har positiv realdel är systemet instabilt.
3. Om samtliga egenvärden till A-matrisen har realdelar som är negativa eller noll är systemet stabilt.

□

I det generella fallet, då A-matrisen inte är diagonal, gäller samma regler som i exempel 5.2 bortsett från att det för stabilitet inte räcker att egenvärdena är ickepositiva. Man kan i alla fall visa att om de rent imaginära egenvärdena är unika är systemet stabilt.

5.3 Stabilitetsanalys

Ur definitionen på stabilitet ser vi att detta kan avgöras genom att studera egenvärdena till A-matrisen, vilka är desamma som polerna till överföringsfunktionen, se Föreläsning 2. I fortsättningen koncentrerar vi oss på asymptotisk stabilitet. Stabilitetsanalysen innebär därför att undersöka om rötterna till karakteristiska polynomet för A-matrisen, som är identiskt med nämnarpolynomet hos överföringsfunktionen, har rötter i vänstra halvplanet.

Det kan vara bra att kunna stabilitetsvillkoren för andra och tredje ordningens system utantill. För ett andragradspolynom med utseendet

$$s^2 + a_1 s + a_2$$

ligger rötterna i vänstra halvplanet om och endast om koefficenterna a_1 och a_2 är positiva. För ett tredjegradspolynom

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$$

krävs också att samtliga koefficienter är positiva, men här krävs dessutom att

$$a_1 a_2 > a_3$$

För högre ordningens polynom krävs i praktiken datorhjälpmedel för att avgöra om rötterna ligger i vänstra halvplanet.

Rotortmetoden

I reglertekniska sammanhang vill man ofta undersöka hur reglerkretsens egenskaper varierar då någon parameter, t.ex. en regulatorparameter, varierar. Rotortmetoden är en metod som visar hur polerna ändras då någon parameter i reglerkretsen varierar. Det fall vi studerar i denna kurs beskrivs i figur 5.8. Det kan vara en process med överföringsfunktionen $Q(s)/P(s)$ som regleras med en P-regulator med förstärkningen K, och där vi vill veta hur slutna systemets poler varierar då K varierar. Det kan också vara en mer komplicerad regulator, där all dynamik utom förstärkningen K ligger tillsammans med processens dynamik i polynomen $Q(s)$ och $P(s)$.

Slutna systemets överföringsfunktion ges av

$$Y(s) = \frac{KQ(s)}{P(s) + KQ(s)} R(s)$$

Vi ser här att slutna systemets nollställen är identiska med öppna systemets nollställen. De ges av täljarpolynomet $Q(s)$ och påverkas inte av förstärkningen K. Polerna kommer däremot att variera då K varierar. Slutna systemets karaktäristiska ekvation fås ur nämnarpolynomet hos överföringsfunktionen,

$$P(s) + KQ(s) = 0$$

Vår uppgift är nu att se hur polerna varierar då K varierar i intervallet $[0, \infty]$. Vi börjar med att studera ändpunkterna. För $K = 0$ blir karaktäristiska ekvationen

$$P(s) = 0$$

Det betyder att slutna systemets poler är identiska med öppna systemets poler då $K = 0$. När $K \to \infty$ får vi ekvationen

$$Q(s) = 0$$

Det betyder att slutna systemets poler kommer att gå till nollställena då $K \to \infty$. Om det finns lika många poler som nollställen kommer alltså samtliga poler att gå till varsitt nollställe. Normalt finns det dock fler poler än nollställen. De poler som ”blir över” kommer då att gå mot oändligheten.

Vi studerar ett enkelt exempel.

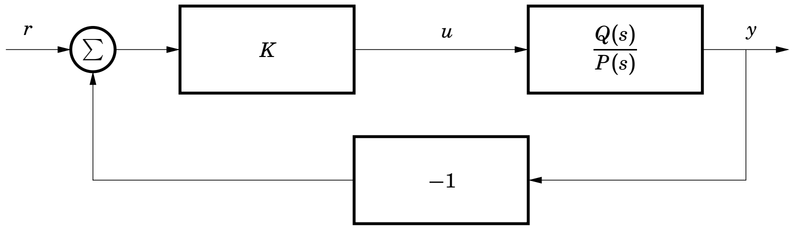
EXEMPEL 5.3—ROTORT FÖR ANDRA ORDNINGENS SYSTEM

Antag att vi har ett reglerproblem enligt figur 5.8 där processen har överföringsfunktionen

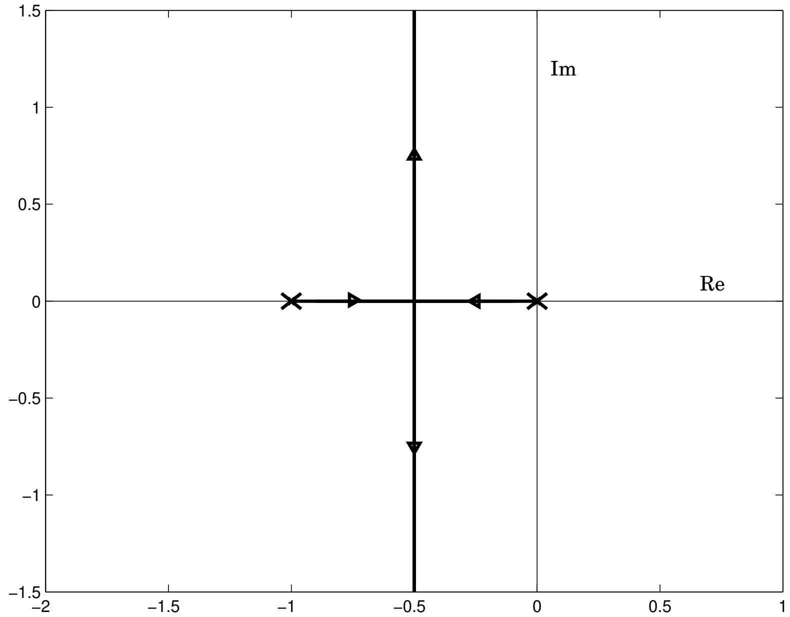
$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Slutna systemets karaktäristiska ekvation ges av

$$P(s) + KQ(s) = s(s+1) + K = 0$$



Figur 5.8 Reglerkretsen vid rotortanalys



Figur 5.9 Rotorten i exempel 5.3

Eftersom detta är en andragradsekvation kan vi enkelt lösa den för hand. Vi får två poler som ges av

$$s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - K}$$

Rotorten visas i figur 5.9. För $K = 0$ ser vi att polerna är lika med 0 och -1, det vill säga öppna systemets poler. När K ökar kommer de två polerna först att röra sig mot varandra på reella axeln. Då $K = 1/4$ kommer de båda att ligga i $s = -0.5$. Då $K > 1/4$ kommer vi att få komplexkonjugerade poler, där realdelarna är konstanta men imaginärdelarna växer då $K \to \infty$. $\square$

För andra ordningens system kan man rita rotorten för hand. För högre ordningens system blir det besvärligare och därför bör man använda datorhjälpmedel för dessa. Vi studerar rotorten för ett tredje ordningens system i följande exempel.

Exempel 5.4—Rotort för tredje ordningens system

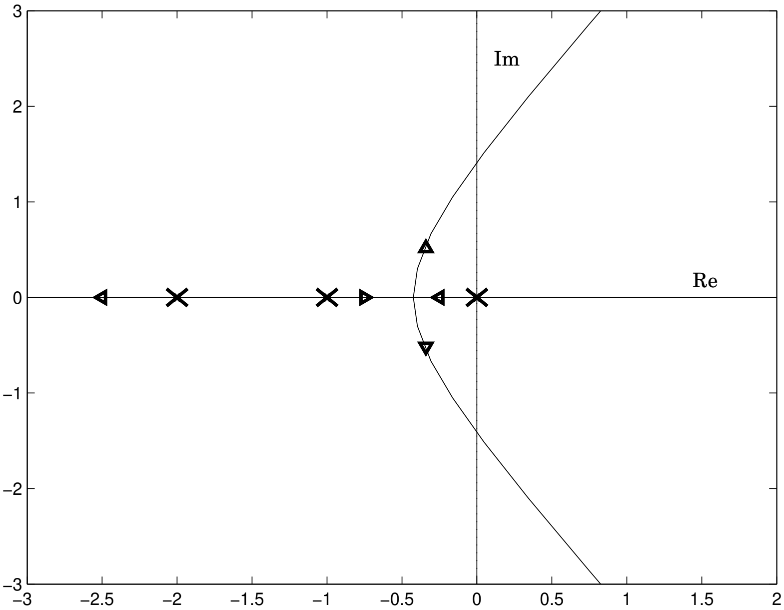
Antag att vi har ett reglerproblem enligt figur 5.8 där processen har överföringsfunktionen

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Slutna systemets karaktäristiska ekvation ges av

$$s(s+1)(s+2) + K = s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

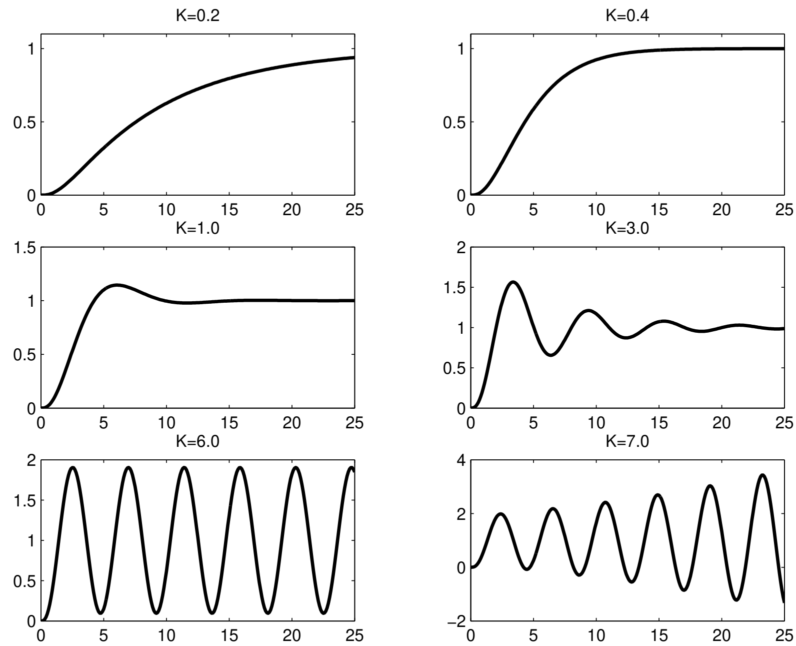
Rotorten visas i figur 5.10. För $K = 0$ ligger polerna i 0, -1 och -2, det vill säga i öppna systemets poler. Eftersom det inte finns några nollställen kommer alla poler att gå mot oändligheten då $K \to \infty$. På vägen dit ändrar polerna karaktär enligt följande:



Figur 5.10 Rotorten i exempel 5.4

$0 < K < 0.4$	Tre reella poler i vänstra halvplanet
$0.4 < K < 6$	En reell och två komplexa poler i vänstra halvplanet
$K = 6$	En reell pol i vänsta halvplanet och två imaginära poler
$6 < K$	En reell pol i vänstra halvplanet och två komplexa poler i högra halvplanet

Reglerkretsens egenskaper varierar med polernas läge. I figur 5.11 visas stegsvaren för olika värden på K. För $0 < K < 0.4$ har vi reella poler och monotona stegsvar. För $K > 0.4$ är polerna komplexa vilket resulterar i oscillerande svar. Ju närmare imaginära axeln de kommer desto sämre blir dämpningen. För $K = 6$ är kretsen på stabilitetsgränsen och för $K > 6$ är systemet instabilt. □



Figur 5.11 Stegsvar för systemet i exempel 5.4

Föreläsning 6

Nyquistkriteriet. Stabilitetsmarginaler

I föregående föreläsning visades hur man kan bestämma om en process eller en reglerkrets är stabil genom att undersöka poler hos överföringsfunktioner eller egenvärden hos A-matriser. I denna föreläsning ska vi gå igenom ytterligare en metod för att avgöra stabilitet, nämligen Nyquistkriteriet. I Nyquistkriteriet analyseras frekvensbeskrivningar, antingen i form av Nyquistdiagram eller Bodediagram. Därefter ska vi definiera några mått som anger stabilitetsmarginaler.

6.1 Nyquistkriteriet

För att härleda Nyquistkriteriet krävs att man sätter sig in i den så kallade argumentvariationsprincipen. Argumentvariationsprincipen beskrivs sist i detta kapitel. Vi ska här nöja oss med en intuitiv förklaring till Nyquistkriteriet.

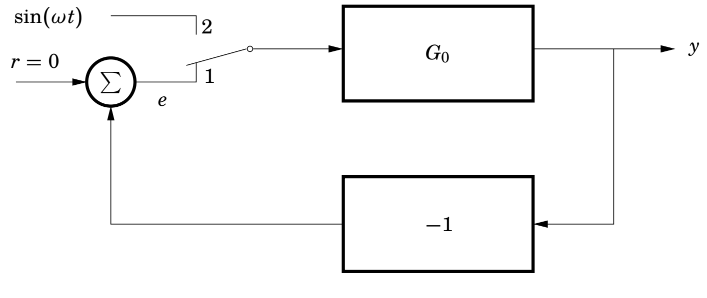
I figur 6.1 visas blockschemat för den enkla reglerkretsen där $G_0 = G_R G_P$ är kretsöverföringsfunktionen, det vill säga överföringsfunktionen som bildas av produkten mellan processens överföringsfunktion G_P och regulatorns överföringsfunktion G_R. I figuren är det inlagt en väljare som gör det möjligt att bryta återkopplingen. När väljaren är i läge 1 fungerar reglerkretsen som vanligt. I läge 2 är däremot återkopplingen bruten och en sinussignal skickas in till kretsöverföringsfunktionen.

Antag att väljaren ligger i läge 2. Under förutsättning att kretsöverföringsfunktionen är stabil kommer då signalen e också att bli en sinussignal. När vi gick igenom frekvensanalys i föreläsning 4 visade vi att signalen ges av

$$\begin{aligned} e(t) &= -|G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega)) \\ &= |G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega) + \pi) \end{aligned}$$

Låt oss nu välja frekvensen på sinussignalen till den frekvens då $\arg G_0(i\omega) = -\pi$ och beteckna denna frekvens ω_0. Vi får då

$$e(t) = |G_0(i\omega_0)| \sin(\omega_0 t)$$



Figur 6.1 Den enkla reglerkretsen som analyseras med Nyquistkriteriet

Låt oss vidare anta att $|G_0(i\omega_0)| = 1$. Då kommer vi att få signalen

$$e(t) = \sin(\omega_0 t)$$

det vill säga samma signal som skickas in till systemet. Om man nu slår omkopplaren från läge 2 till läge 1 kommer signalerna i reglerkretsen att bli oförändrade vilket innebär att reglerkretsen självsvänger. Det betyder att vi ligger på stabilitetsgränsen.

På motsvarande sätt kan man föreställa sig vad som händer om $|G_0(i\omega_0)| \neq 1$. Antag att $|G_0(i\omega_0)| > 1$. Då kommer signalen $e(t)$ att ha samma frekvens och fas som insignalen, men amplituden kommer att vara större. Om man i detta fallet slår omkopplaren från läge 2 till läge 1 kommer amplituderna i reglerkretsen att växa och man får en instabil reglerkrets. På motsvarande sätt kommer en förstärkning $|G_0(i\omega_0)| < 1$ att innebära att amplituderna i reglerkretsen minskar och vi får en stabil reglerkrets.

Vi kan alltså sammanfatta stabilitetsundersökningen på följande sätt. Undersök kretsöverföringsfunktionens belopp vid den frekvens ω_0 där $\arg G_0(i\omega) = -\pi$. Beroende på beloppets storlek får vi följande fall.

$\lvert G_0(i\omega_0)\rvert < 1$	Stabilt
$\lvert G_0(i\omega_0)\rvert = 1$	Stabilitetsgränsen
$\lvert G_0(i\omega_0)\rvert > 1$	Instabilt

Detta intuitiva resonemang stämmer tyvärr inte alltid. Resonemanget förutsätter t.ex. att signaler med annan frekvens än ω_0 dämpas ut, vilket inte alltid är fallet. Det var Nyquist som upptäckte bristen i detta resonemang och han formulerade därefter sitt kriterium:

Nyquistkriteriet: Antag att kretsöverföringsfunktionen inte har några poler i högra halvplanet och att eventuella poler på imaginära axeln är unika. Då är slutna systemet asymptotiskt stabilt om punkten -1 ligger till vänster om Nyquistkurvan då denna genomlöps från $\omega = 0$ till $\omega = \infty$.

I figur 6.2 visas Nyquistkurvor för några olika kretsöverföringsfunktioner och tolkningen av Nyquistkriteriet för dessa.

En fördel med Nyquistkriteriet jämfört med de metoder för att avgöra stabilitet som vi gått igenom tidigare är att Nyquistkriteriet även går att använda då systemet har en dödtid. Nyquistkriteriet kan inte användas då kretsöverföringsfunktionen har poler i högra halvplanet. I detta fallet får man använda argumentvariationsprincipen, som beskrivs sist i detta kapitel.

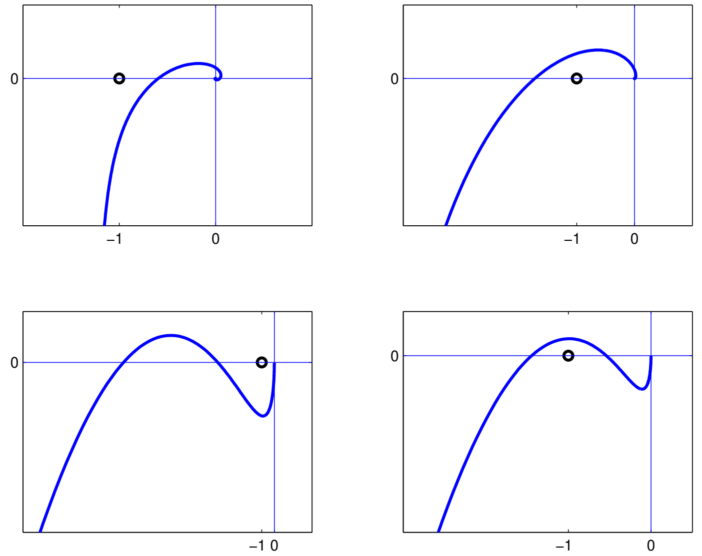
Exempel 6.1—Tredje ordningens system

Vi tillämpar Nyquistkriteriet på samma system som vi tidigare studerat med hjälp av rotorten, det vill säga kretsöverföringsfunktionen

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

I figur 6.3 visas Nyquistkurvan för G_0. Nyquistkurvan börjar i tredje kvadranten. På grund av integratorn har den en oändligt stor förstärkning vid låga frekvenser. När ω ökar närmar sig Nyquistkurvan origo. Vid frekvensen ω_0 korsar Nyquistkurvan negativa reella axeln och kommer in i andra kvadranten.

För att använda Nyquistkriteriet måste vi först bestämma frekvensen ω_0. Det kan man göra genom att räkna ut $G_0(i\omega)$ och sedan bestämma det värde på ω då



Figur 6.2 Nyquistkurvor för fyra olika kretsöverföringsfunktioner. Enligt Nyquistkriteriet ger de två till vänster stabila system, medan de till höger ger instabila system

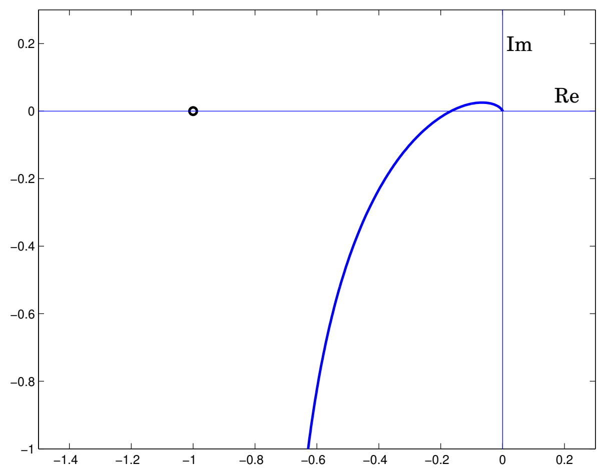
Nyquistkurvan skär negativa reella axeln.

$$
\begin{aligned}
G_0(i\omega) &= \frac{K}{i\omega(1+i\omega)(2+i\omega)} = \frac{-Ki(1-i\omega)(2-i\omega)}{\omega(1+\omega^2)(4+\omega^2)} \\
&= \frac{-Ki(2-\omega^2-3i\omega)}{\omega(1+\omega^2)(4+\omega^2)} = \frac{-3K}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} - i\frac{K(2-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(4+\omega^2)}
\end{aligned}
$$

Uttrycket visar att imaginärdelen är noll då $\omega = \omega_0 = \sqrt{2}$. Nästa steg i stabilitetsundersökningen är att bestämma *var* Nyquistkurvan skär reella axeln. Skärningspunkten är

$$G_0(i\sqrt{2}) = -\frac{3K}{3\cdot 6} = -\frac{K}{6}$$

Nyquistkurvan ligger till höger om punkten -1 då $K < 6$. Nyquistkriteriet ger alltså samma stabilitetsvillkor som vi såg när vi undersökte rotorten.. □



Figur 6.3 Nyquistkurvan i exempel 6.1, ritad för fallet $K = 1$

6.2 Stabilitetsmarginaler

Vi har nu diskuterat stabilitet och olika metoder att avgöra stabilitet. I praktiken nöjer man sig inte med att en reglerkrets är stabil, utan man vill ha en marginal mot instabilitetsgränsen. Vi ska här gå igenom tre vanliga marginaler, nämligen förstärkningsmarginalen, fasmarginalen och dödtidsmarginalen.

Förstärkningsmarginal och fasmarginal

Förstärkningsmarginalen och fasmarginalen definieras enklast i Nyquistdiagrammet, se figur 6.4.

För enkelhets skull antar vi att Nyquistkurvan för kretsöverföringsfunktionen G_0 är monotont avtagande både vad gäller belopp och argument. Förstärkningsmarginalen (eller amplitudmarginalen som den också kallas) betecknas A_m och talar om hur mycket vi kan öka förstärkningen utan att få instabilitet. Denna marginal avläses vid den frekvens ω_0 där fasvridningen är $-\pi$, det vill säga $\arg G_0(i\omega_0) = -\pi$. Förstärkningsmarginalen ges av

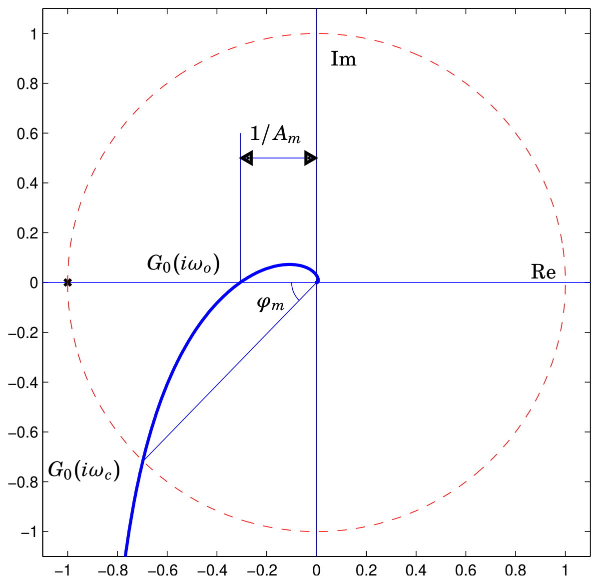
$$A_m = 1/\left|G_0(i\omega_0)\right|$$

Fasmarginalen betecknas φ_m och talar om hur mycket fasvridningen kan minskas utan att man passerar stabilitetsgränsen. Fasmarginalen kan vi bestämma genom att se vilken fasvridning Nyquistkurvan har vid den frekvens ω_c där beloppet är ett, det vill säga $|G_0(i\omega_c)| = 1$. Frekvensen ω_c kallas skärfrekvensen. Fasmarginalen är

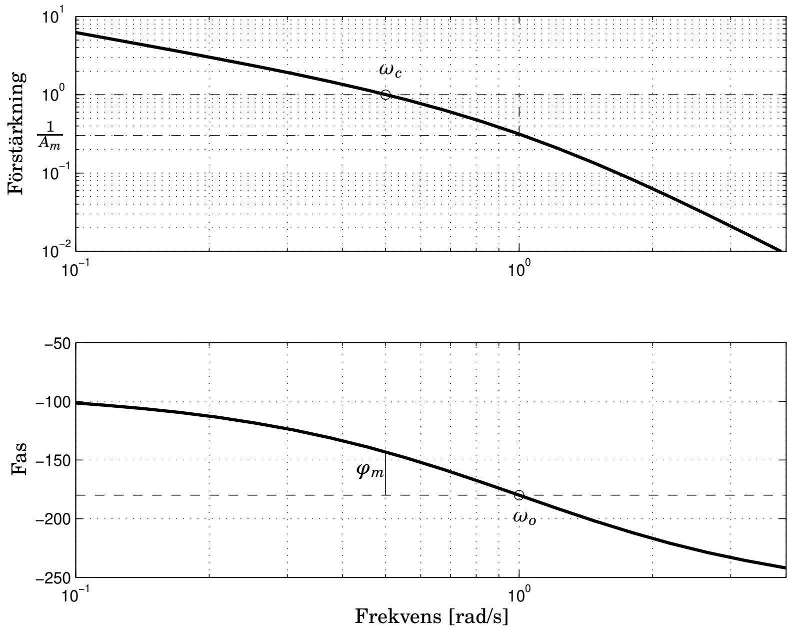
$$\varphi_m = \pi + \arg G_0(i\omega_c)$$

Förstärknings- och fasmarginalen kan också avläsas i Bodediagrammet, se figur 6.5. Den kritiska punkten -1 i Nyquistdiagrammet svarar mot två horisontella linjer i Bodediagrammet, en linje svarande mot beloppet $|G_0(i\omega)| = 1$ och en linje svarande mot argumentet $\arg G_0(i\omega) = -\pi$. Förstärkningsmarginalen får vi genom att se hur långt under linjen $|G_0(i\omega)| = 1$ förstärkningskurvan ligger vid frekvensen ω_0. Fasmarginalen får vi genom att se hur långt över linjen $\arg G_0(i\omega) = -\pi$ faskurvan ligger vid frekvensen ω_c.

Att ha rimliga stabilitetsmarginaler är viktigt, eftersom det innebär att processens dynamik kan variera inom vissa gränser utan att man får instabilitet. Detta



Figur 6.4 Bestämning av fasmarginal φ_m och förstärkningsmarginal A_m i Nyquistdiagrammet



Figur 6.5 Bestämning av fasmarginal φ_m och förstärkningsmarginal A_m i Bodediagrammet

är dock inte den enda anledningen. Stabilitetsmarginalerna och avståndet från den kritiska punkten -1 är också avgörande för reglerkretsens prestanda. Om stabilitetsmarginalerna är små får man en orolig och dåligt dämpad reglering, medan stora stabilitetsmarginaler ger en långsam reglering.

Vanliga tumregler för specifikationer på förstärknings- och fasmarginalen är $A_m \in [2, 6]$ och $\varphi_m \in [45°, 60°]$.

Dödtidsmarginal

Dödtidsmarginalen talar om hur lång dödtid som kan adderas till reglerkretsen utan att den blir instabil. Dödtidsmarginalen kan inte tolkas som ett avstånd i Nyquistdiagrammet på samma sätt som förstärknings- och fasmarginalen.

Antag att vi har en kretsöverföringsfunktion $G_0(s)$ och att vi kompletterar denna med en dödtid. Den nya kretsöverföringsfunktionen blir då

$$G_0^{ny}(s) = e^{-sL}G_0(s)$$

där L är dödtiden. Förstärkningen och fasvridningen för den nya kretsöverföringsfunktionen ges av

$$|G_0^{ny}(i\omega)| = |G_0(i\omega)|$$
$$\arg G_0^{ny}(i\omega) = \arg G_0(i\omega) - \omega L$$

Förstärkningen påverkas alltså inte av dödtiden, medan fasvridningen minskar. Antag att den ursprungliga kretsöverföringsfunktionen G_0 har skärfrekvensen ω_c, det vill säga $|G_0(i\omega_c)| = 1$, med motsvarande fasmarginal φ_m. Eftersom G_0^{ny} har samma förstärkning som G_0 kommer G_0^{ny} också att ha skärfrekvensen ω_c. Fasmarginalen kommer däremot att minska eftersom fasvridningen har minskat. Den nya fasmarginalen blir

$$\varphi_m^{ny} = \varphi_m - \omega_c L$$

Om dödtiden är alltför lång försvinner fasmarginalen och det slutna systemet blir instabilt. Detta inträffar då

$$\omega_c L = \varphi_m$$

Detta ger oss följande gräns för hur lång dödtiden kan vara innan systemet blir instabilt

$$L_m = \frac{\varphi_m}{\omega_c}$$

Dödtiden L_m kallas dödtidsmarginalen och är en robusthetsmarginal på samma sätt som förstärkningsmarginalen A_m och fasmarginalen φ_m.

Naturligtvis kan man inte tillåta att dödtiden blir så lång att man kommer nära marginalen L_m. Gränsen

$$\omega_c L < 0.2$$

är en bra tumregel som innebär att fasmarginalen minskar med högst 12°. Ekvationen visar också tydligt vilka möjligheter som finns att klara denna gräns. Antingen får man se till att dödtiden L är tillräckligt kort, eller så får man se till att skärfrekvensen ω_c, det vill säga reglerkretsens snabbhet, inte är för hög.

6.3 Argumentvariationsprincipen (ingår ej i kursen)

Vi ska nu kort sammanfatta den allmänna argumentvariationsprincipen. Därefter ska vi se hur vi kan använda denna för att i reglertekniska sammanhang undersöka stabilitet.

Antag att vi har en funktion $F(s)$ som är analytisk så när som på i ett ändligt antal poler $p_1,\ p_2, \dots, p_P$ i ett område som omsluts av en kurva C i det komplexa talplanet. Se figur 6.6. Antag vidare att funktionen har ett ändligt antal nollställen $n_1,\ n_2, \dots, n_N$ innanför kurvan C.

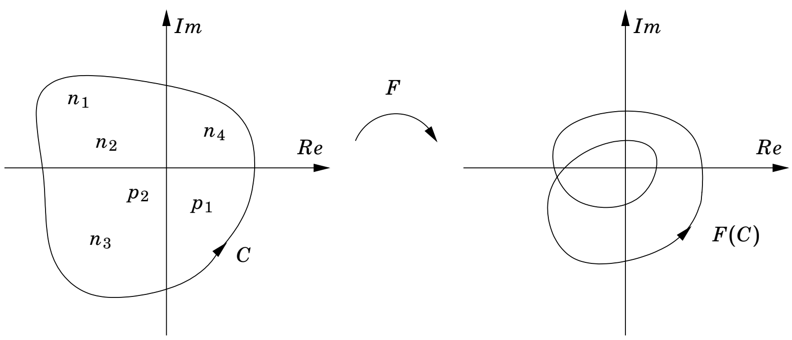
Undersök nu hur kurvan C avbildas av funktionen F, och studera speciellt hur många varv kurvan $F(C)$ cirkulerar runt origo. Observera att kurvan har en riktning och att antalet varv därmed kan vara både positivt (moturs) och negativt (medurs). Låt P beteckna antalet poler innanför C och låt N beteckna antalet nollställen innanför C. Argumentvariationsprincipen säger att

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg F(s)$$

I ord betyder detta att antalet nollställen (N) minus antalet poler (P) är lika med det antal varv kurvan $F(C)$ cirkulerar runt origo. I figur 6.6 är $N = 4$, $P = 2$ och $F(C)$ cirkulerar två varv i positiv riktning runt origo.

Reglerteknisk tillämpning Vi ska nu se hur vi kan tillämpa argumentvariationsprincipen för att undersöka stabilitet inom reglertekniken. Vi studerar den enkla reglerkretsen som beskrivs i figur 6.1. Det slutna systemet har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$



Figur 6.6 Avbildning vid argumentvariationsprincipen

Polernas läge bestäms av nämnarpolynomet till $G(s)$. Vi låter därför funktionen $F(s)$ vara

$$F(s) = 1 + G_0(s)$$

Eftersom vi är intresserade av att veta om det finns några poler i högra halvplanet skulle vi helst vilja ha en kurva C som omsluter högra halvplanet. Den kurva vi väljer visas i figur 6.7. Om vi låter $R \to \infty$ och $r \to 0$ kommer kurvan C att omsluta alla poler och nollställen i högra halvplanet. Anledningen till att vi inför den lilla halvcirkeln är att det inte får förekomma några poler eller nollställen på kurvan C och att det är mycket vanligt att vi har poler i origo. Det är t.ex. fallet då regulatorn innehåller en integraldel.

Eftersom vi valt $F(s) = 1 + G_0(s)$ gäller att

N = Antalet nollställen hos $1 + G_0$ innanför C
= Antalet poler hos G innanför C
P = Antalet poler hos $1 + G_0$ innanför C
= Antalet poler hos G_0 innanför C

Att den sista ekvationen är sann kan man övertyga sig om på följande sätt. Om vi antar att G_0 är kvoten mellan två polynom får vi:

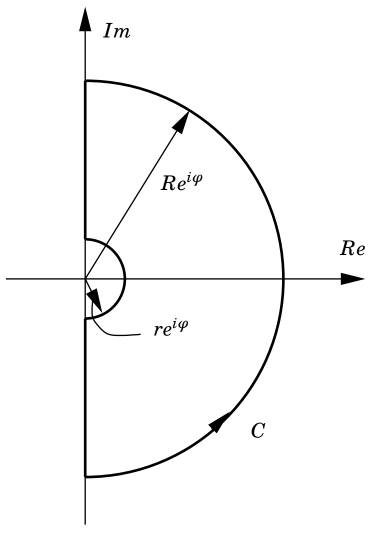
$$G_0(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \qquad \Rightarrow \qquad 1 + G_0(s) = \frac{P(s) + Q(s)}{P(s)}$$

Eftersom $G_0(s)$ har samma nämnarpolynom som $1 + G_0(s)$ har de också samma poler. Argumentvariationsprincipen säger nu att

$N - P$ = Antal varv som $1 + G_0(C)$ cirkulerar runt origo

I stället för att studera hur många varv funktionen $1 + G_0$ cirkulerar runt origo väljer vi att studera hur många varv G_0 cirkulerar runt punkten -1. Vi får då följande procedur.

1. Rita $G_0(s)$ då kurvan C genomlöps.
2. Räkna hur många varv n kurvan cirkulerar runt punkten -1.
3. Argumentvariationsprincipen ger: $N - P = n$
4. Om $N = 0$ finns det inga poler i högra halvplanet och det slutna systemet är asymptotiskt stabilt.



Figur 6.7 Kurvan C i den reglertekniska tillämpningen av argumentvariationsprincipen

Nyquistkriteriet är ett specialfall av argumentvariationsprincipen. Nyquistkriteriet behandlar fallet då kretsöverföringsfunktionen inte har några poler i högra halvplanet, det vill säga fallet då $P = 0$. Argumentvariationsprincipen säger då att slutna systemet är stabilt ($N = 0$) då $G_0(C)$ ej omsluter punkten -1. I detta fallet räcker det att studera Nyquistkurvan. I stället för att beräkna bilden av hela kurvan C kan man alltså nöja sig med att studera bilden av positiva imaginära axeln.

Exempel 6.2—Tredje ordningens system

Vi tillämpar argumentvariationsprincipen på samma system som vi studerade i exempel 6.1, det vill säga

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Första steget är att bestämma $G_0(C)$. Vi delar in kurvan C i några olika segment. Vi börjar med att räkna ut bilden av positiva imaginära axeln, det vill säga Nyquistkurvan. Det gjorde vi i exempel 6.1 och kurvan visas i figur 6.3. Vi behöver inte räkna ut bilden av negativa imaginära axeln eftersom denna blir lika med speglingen av Nyquistkurvan i reella axeln.

Bilden av den stora halvcirkeln ges av

$$G_0(Re^{i\varphi}) \to 0, \quad R \to \infty$$

Den stora halvcirkeln avbildas alltså på origo. Den lilla halvcirkeln ger

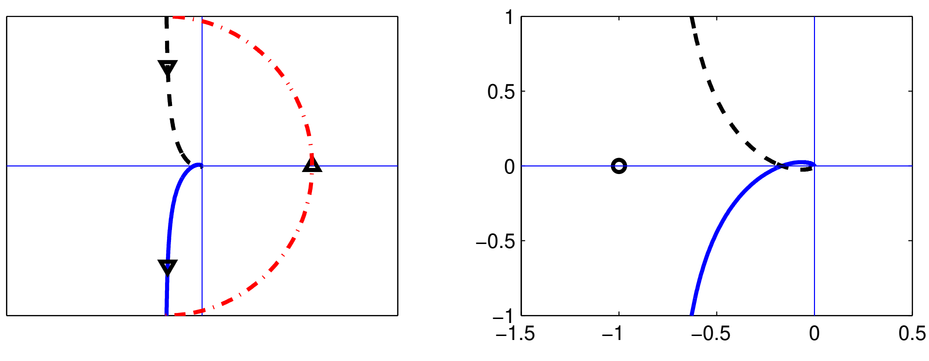
$$G_0(re^{i\varphi}) \to \frac{K}{2re^{i\varphi}} = \frac{K}{2r}e^{-i\varphi}, \quad r \to 0 \qquad \varphi : \frac{\pi}{2} \to 0 \to -\frac{\pi}{2}$$

Den lilla halvcirkeln avbildas med andra ord på en halvcirkel med oändligt stor radie som börjar med argumentet $-\pi/2$, passerar 0 och slutar med argumentet $\pi/2$.

I figur 6.8 visas $G_0(C)$. I figuren visas också en förstoring av den intressanta delen i närheten av punkten -1 för fallet $K = 1$.

Nyquistkurvan ligger alltså till höger om punkten -1 då $K < 6$, samma stabilitetsvillkor som vi sett tidigare. Då $K > 6$ kommer vi att cirkulera två varv runt punkten -1, vilket enligt argumentvariationsprincipen innebär att vi har två poler i högra halvplanet. Detta kom vi också fram till då vi studerade rotorten i föregående föreläsning. □

Argumentvariationsprincipen och Nyquistkriteriet är betydligt mer komplicerade metoder för att avgöra stabilitet än de metoder som vi studerat tidigare. Å andra sidan ger metoderna en mycket viktig insyn och förståelse för reglerteknik. Metoderna visar t.ex. att det är reglerkretsens egenskaper i det frekvensområdet där fasvridningen är ungefär $-180°$ som är av avgörande betydelse för stabilitet, robusthet och prestanda.



Figur 6.8 Till vänster visas bilden $G_0(C)$ i exempel 6.2. Till höger visas en förstoring av området nära origo

Föreläsning 7

Känslighetsfunktionen. Stationära fel

I slutet på förra föreläsningen definierade vi några mått som anger marginaler till stabilitetsgränsen. I denna föreläsning ska vi först beskriva känslighetsfunktionen som bland annat kan tolkas som ett mått på stabilitetsmarginalen. Därefter ska vi behandla ytterligare ett grundläggande krav vi ofta ställer på reglerkretsen, nämligen att reglerfelet ska försvinna i stationaritet.

7.1 Känslighetsfunktionen

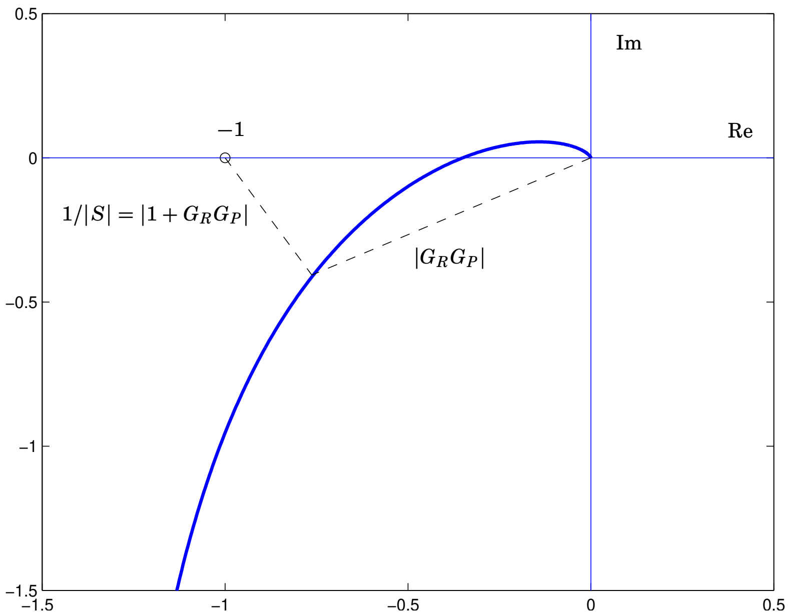
I en enkel reglerkrets med kretsöverföringsfunktionen $G_0 = G_R G_P$, där G_P är processens överföringsfunktion och G_R är regulatorns överföringsfunktion, ges känslighetsfunktionen av

$$S = \frac{1}{1 + G_P G_R} \tag{7.1}$$

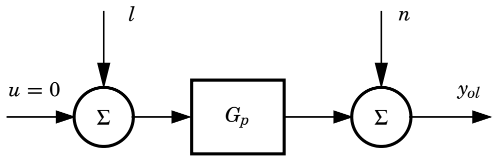
Känslighetsfunktionen är en överföringsfunktion som kan tolkas på flera olika sätt. Vi ska här visa tre tolkningar av den.

Känslighetsfunktionen som mått på stabilitetsmarginal

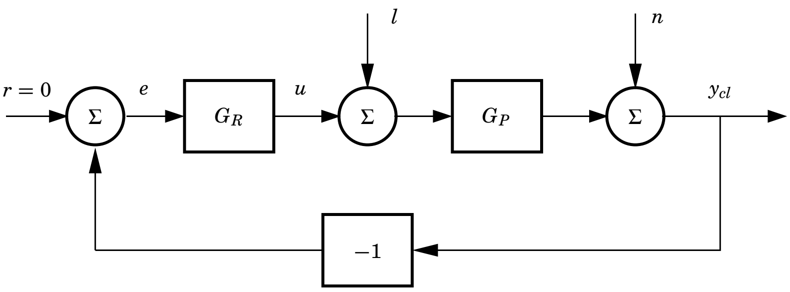
I figur 7.1 visas en tolkning av känslighetsfunktionen i Nyquistdiagrammet. Varje punkt på Nyquistkurvan ges ju av kretsöverföringsfunktionens värde vid den



Figur 7.1 Känslighetsfunktionen tolkad i Nyquistdiagrammet



Figur 7.2 Blockschema för en öppen reglerkrets



Figur 7.3 Blockschema för en sluten reglerkrets

aktuella frekvensen, det vill säga $G_R(i\omega)G_P(i\omega)$. Avståndet från punkten -1 till motsvarande punkt på Nyquistkurvan blir därför $|1 + G_R(i\omega)G_P(i\omega)|$. Eftersom känslighetsfunktionen ges av ekvation (7.1) ser vi därför att $1/|S(i\omega)|$ beskriver avståndet till den kritiska punkten -1 för den aktuella frekvensen. Ett litet värde på känslighetsfunktionen är bra ur robusthetssynpunkt, eftersom det innebär att vi har en stor marginal till instabilitetsgränsen.

Det största värdet på känslighetsfunktionen betecknas M_s, det vill säga

$$M_s = \max_{\omega} |S(i\omega)|$$

I figur 7.1 ser vi att M_s ges av inversen av det kortaste avståndet till Nyquistkurvan. Värdet M_s är därför ett intressant stabilitetsmarginalmått, på samma sätt som förstärknings-, fas- och dödtidsmarginalerna som definierades i förra föreläsningen. Ofta väljer man ett värde på M_s i intervallet $M_s \in [1.2, 2]$.

Känslighetsfunktionen som mått på störningsdämpning

I figur 7.2 visas blockschemat för en process med överföringsfunktionen G_P som påverkas av laststörningar l och mätbrus n. Störningar kan påverka processen på många sätt, men man brukar representera dem med dessa två störningar. Laststörningar kommer in på ingången på processen och påverkar därför processen på samma sätt som styrsignalen. Människor som kommer in i en lokal fungerar som värmeelement och därmed laststörningar vid temperaturregleringen. Mätstörningar är störningar som påverkar mätsignalen. Det är ofta högfrekventa elektriska störningar och kallas ofta mätbrus. Då styrsignalen är $u = 0$ blir utsignalen från processen

$$Y_{ol}(s) = N(s) + G_P(s)L(s)$$

Antag nu att vi sluter reglerkretsen med en regulator G_R enligt figur 7.3. Då referensvärdet är $r = 0$ blir utsignalen från reglerkretsen

$$Y_{cl}(s) = \frac{1}{1 + G_R(s)G_P(s)} N(s) + \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} L(s)$$

Förhållandet mellan utsignalerna från det öppna och det slutna systemet blir

$$\frac{Y_{cl}(s)}{Y_{ol}(s)} = \frac{1}{1 + G_P(s)G_R(s)} = S(s).$$

Känslighetsfunktionen beskriver med andra ord hur störningar påverkas av återkoppling. Störningar med frekvenser ω sådana att $|S(i\omega)| < 1$ undertrycks av återkopplingen, medan störningar med frekvenser sådana att $|S(i\omega)| > 1$ förstärks av återkopplingen.

Känslighetsfunktionen som mått på inverkan av modellfel

En tredje tolkning av känslighetsfunktionen får man genom att undersöka vilken effekt ett modellfel får på mätsignalen. Antag att vi tagit fram en modell G_P av processen som ska regleras. Denna modell är naturligtvis aldrig en exakt beskrivning av den verkliga processen som vi betecknar G_P^0. De slutna systemen med modellen respektive den verkliga överföringsfunktionen ges av

$$Y = \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} R \qquad Y^0 = \frac{G_R G_P^0}{1 + G_R G_P^0} R$$

där Y och Y^0 är mätsignalerna som modell respektive den verkliga processen ger.

Det relativa felet i mätsignalen ges nu av

$$\frac{Y^0 - Y}{Y} = \frac{\dfrac{G_R G_P^0}{1 + G_R G_P^0} R - \dfrac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} R}{\dfrac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} R} = \frac{G_P^0(1 + G_R G_P) - G_P(1 + G_R G_P^0)}{G_P(1 + G_R G_P^0)}$$
$$= \frac{1}{1 + G_R G_P^0} \cdot \frac{G_P^0 - G_P}{G_P} = S^0 \cdot \frac{G_P^0 - G_P}{G_P}$$

där S^0 betecknar det *verkliga* systemets känslighetsfunktion, det vill säga den känslighetsfunktion vi får om vi använder G_P^0 i stället för G_P i ekvation (7.1). Vi kan skriva om uttrycket en sista gång som

$$\frac{Y^0 - Y}{Y} = S^0 \cdot \frac{G_P^0 - G_P}{G_P}$$

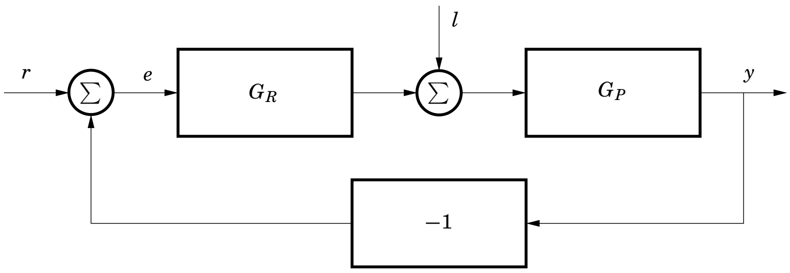
Här ser vi nu att känslighetsfunktionen är en överföringsfunktion mellan det relativa felet i modellen och det relativa felet i mätsignalen. Återigen ser vi att det är en fördel om känslighetsfunktionen är liten. Vid de frekvenser där känslighetsfunktionen är liten ger modellfel relativt liten påverkan på mätsignalen. I figur 7.1 ser vi att känslighetsfunktionen är som störst vid de frekvenser där fasvridningen är ungefär $-180°$. Det är med andra ord vid dessa frekvenser det är viktigt att man har en bra modell av processen som ska regleras.

7.2 Stationära fel

Vi ska nu undersöka stationära fel och vilka egenskaper som krävs av regulatorn för att man ska undvika kvarstående reglerfel i stationäritet. Det problem vi ska undersöka beskrivs i figur 7.4. Vi studerar den enkla reglerkretsen med två insignaler, referensvärdet r och laststörningen l. Detta ger oss två överföringsfunktioner:

$$Y = \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} R + \frac{G_P}{1 + G_R G_P} L$$

Mätsignalen påverkas alltså både av referensvärdesändringar och laststörningar. I många sammanhang väljer man att betrakta dessa två fall var för sig.



Figur 7.4 Den enkla reglerkretsen

Servoproblemet kallas fallet då $l = 0$, det vill säga fallet då vi enbart är intresserade av referensvärdesändringar. Detta är vanligt i samband med motorstyrningar, t.ex. hos farkoster och industrirobotar. Vid servoproblemet ges överföringsfunktionen av

$$Y = \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} R = \frac{G_0}{1 + G_0} R \tag{7.2}$$

där $G_0 = G_R G_P$ betecknar kretsöverföringsfunktionen.

Regulatorproblemet kallas fallet då $r = 0$, det vill säga då vi enbart studerar laststörningar. Detta problem är vanligt inom processreglering där referensvärden ofta är konstanta under långa perioder medan lasten varierar. Vid regulatorproblemet ges överföringsfunktionen av

$$Y = \frac{G_P}{1 + G_R G_P} L \tag{7.3}$$

Vi ska behandla servoproblemet och regulatorproblemet var för sig, och börjar med servoproblemet.

Stationära fel – Servoproblemet

Reglerfelet vid servoproblemet kan vi räkna ut med hjälp av ekvation (7.2).

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} R(s)$$

Man kan använda slutvärdesteoremet för att direkt ur Laplacetransformen bestämma reglerfelet $e(t)$ då $t \to \infty$. Slutvärdesteoremet ger

$$e_\infty = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

Observera att slutvärdesteoremet endast får användas då det existerar ett gränsvärde. Gränsvärdet existerar om och endast om funktionen $sE(s)$ har samtliga poler i vänstra halvplanet. Beviset för slutvärdesteoremet ges av definitionen av Laplacetransformen:

$$\lim_{s \to 0}(sE(s) - e(0)) = \lim_{s \to 0} \int_0^\infty e^{-st} \dot{e}(t) dt = \int_0^\infty \dot{e}(t) dt = \lim_{t \to \infty}(e(t) - e(0))$$

Innan vi undersöker det generella fallet studerar vi ett exempel.

EXEMPEL 7.1—STATIONÄRT FEL VID STEG- OCH RAMPFÖLJNING
Antag att processen och regulatorn ges av överföringsfunktionerna

$$G_P = \frac{1}{s(1 + sT)} \qquad G_R = K$$

Processmodellen kan t.ex. beskriva en elektrisk motor där insignalen är strömmen in till motorn och utsignalen är motorns vinkel. Regulatorn är en P-regulator med förstärkningen K. Tillsammans ger de kretsöverföringsfunktionen

$$G_0 = G_R G_P = \frac{K}{s(1+sT)}$$

Antag att referensvärdet ändras i form av ett steg, det vill säga

$$r(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Laplacetransformen för ett steg ges av

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Reglerfelet blir därför

$$E(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} R(s) = \frac{s(1+sT)}{s(1+sT)+K} \cdot \frac{1}{s}$$

Med hjälp av slutvärdesteoremet kan vi nu räkna ut det stationära felet.

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1+sT)}{s(1+sT)+K} = 0$$

Gränsvärdet existerar under förutsättning att parametrarna K och T är positiva. Vi ser alltså att vi inte får något kvarstående reglerfel, trots att vi endast har en P-regulator. Varför ska vi snart se när vi studerar det generella fallet. Först undersöker vi fallet då referensvärdet ändras i form av en ramp, det vill säga

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Laplacetransformen för en ramp ges av

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

Reglerfelet blir därför

$$E(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} R(s) = \frac{s(1+sT)}{s(1+sT)+K} \cdot \frac{1}{s^2}$$

I detta fallet får vi det stationära felet

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1+sT}{s(1+sT)+K} = \frac{1}{K}$$

Även här existerar gränsvärdet så länge parametrarna K och T är positiva. När referensvärdet ändras i form av en ramp får vi alltså ett kvarstående reglerfel. Storleken är omvänt proportionell mot regulatorförstärkningen K. □

Det generella fallet Vi ska nu studera det generella fallet. Vi antar att kretsöverföringsfunktionen kan beskrivas som

$$G_0(s) = \frac{K}{s^n} \cdot \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots} e^{-sL} = \frac{KB(s)}{s^n A(s)} e^{-sL}$$

Denna kretsöverföringsfunktion täcker in de flesta av de processer och regulatorer vi stöter på. Den består av en lågfrekvensdel som ges av K/s^n, en dödtid L och två polynom som båda har statiska förstärkningen 1, det vill säga $A(0) = B(0) = 1$.

Referensvärdet beskriver vi som

$$r(t) = \begin{cases} t^m/m! & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

där m är ett positivt heltal. Laplacetransformen för referensvärdet ges av

$$R(s) = \frac{1}{s^{m+1}}$$

Reglerfelet för detta generella exempel blir

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} R(s) = \frac{s^n A(s)}{s^n A(s) + KB(s)e^{-sL}} \cdot \frac{1}{s^{m+1}}$$

Med hjälp av slutvärdesteoremet kan vi nu räkna ut det stationära felet.

$$e_\infty = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{A(s)}{s^n A(s) + KB(s)e^{-sL}} \cdot \frac{s^n}{s^m}$$

naturligtvis under förutsättning att gränsvärdet existerar. Eftersom $A(0) = B(0) = 1$ och $e^{-sL} \to 1$ då $s \to 0$ gäller att

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^n + K} s^{n-m}$$

Vi ser alltså att det stationära felet enbart bestäms av kretsöverföringsfunktionens lågfrekvensegenskaper, det vill säga K och n, samt referensvärdets egenskaper m. Vi får följande fall beroende på förhållandet mellan m och n:

$n > m$	$e_\infty = 0$
$n = m = 0$	$e_\infty = \dfrac{1}{1+K}$
$n = m \geq 1$	$e_\infty = \dfrac{1}{K}$
$n < m$	Gränsvärde saknas

Tabellen visar att det är antalet integratorer n i kretsöverföringsfunktionen som avgör hur snabba referensvärden man kan följa utan kvarstående reglerfel. I exempel 7.1 hade kretsöverföringsfunktionen en integrator, det vill säga $n = 1$. Vid stegändringar är $m = 0$ varför reglerfelet blir $e_\infty = 0$. Vid rampändringar är $m = 1$, vilket enligt tabellen ovan innebär att $e_\infty = 1/K$. Detta är naturligtvis precis de resultat vi kom fram till i exempel 7.1.

Stationära fel – Regulatorproblemet

Vi ska nu undersöka stationära fel vid regulatorproblemet, det vill säga fallet då referensvärdet är konstant men laststörningarna varierar. Vi antar att referensvärdet är $r = 0$. Enligt ekvation (7.3) ges mätsignalen då av

$$Y(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} L(s)$$

Precis som tidigare kan vi använda slutvärdesteoremet för att bestämma det stationära reglerfelet. Eftersom vi antar att $r = 0$ kan vi lika gärna studera mätsignalen direkt i stället för reglerfelet. Slutvärdesteoremet ger

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

Vi inleder med att studera regulatorproblemet i ett exempel.

EXEMPEL 7.2—STATIONÄRT FEL VID REGULATORPROBLEMET
Antag att processen och regulatorn ges av överföringsfunktionerna

$$G_P = \frac{1}{1+sT} \qquad G_R = \frac{K}{s}$$

Processmodellen kan t.ex. beskriva sambandet mellan ström och vinkelhastighet hos en elektrisk motor. Regulatorn är en I-regulator, det vill säga en rent integrerande regulator. Tillsammans ger de kretsöverföringsfunktionen

$$G_0 = G_R G_P = \frac{K}{s(1+sT)}$$

vilket är samma kretsöverföringsfunktion som vi studerade i exempel 7.1.

Antag att laststörningen ändras i form av ett steg, det vill säga

$$l(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

med Laplacetransformen $L(s) = 1/s$. Mätsignalen blir då

$$Y(s) = \frac{G_P(s)}{1+G_R(s)G_P(s)} L(s) = \frac{s}{s(1+sT)+K} \cdot \frac{1}{s}$$

Med hjälp av slutvärdesteoremet kan vi nu räkna ut den stationära mätsignalen.

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s(1+sT)+K} = 0$$

Gränsvärdet existerar under förutsättning att parametrarna K och T är positiva. Precis som i exempel 7.1 får vi alltså inget kvarstående reglerfel.

Antag nu att processen och regulatorn ges av överföringsfunktionerna

$$G_P = \frac{1}{s(1+sT)} \qquad G_R = K$$

Jämfört med föregående fall har vi nu lagt in en integrator i processen och tagit bort integratorn i regulatorn. Kretsöverföringsfunktionen är därför densamma som tidigare. Mätsignalen vid en stegändring i lasten blir

$$Y(s) = \frac{G_P(s)}{1+G_R(s)G_P(s)} L(s) = \frac{1}{s(1+sT)+K} \cdot \frac{1}{s}$$

Med hjälp av slutvärdesteoremet får vi den stationära mätsignalen

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s(1+sT)+K} = \frac{1}{K}$$

Trots att vi har samma kretsöverföringsfunktion som tidigare får vi nu ett kvarstående reglerfel. Integratorn i processen bidrar inte till att eliminera det stationära felet vid laststörningen. □

Exemplet visar att det har betydelse var integratorerna finns. Vid servoproblemet är det antalet integratorer i kretsöverföringsfunktionen som avgör vilka börvärdesändringar man kan följa utan kvarstående reglerfel. Vid regulatorproblemet är det antalet integratorer i *regulatorn* som avgör vilka laststörningar som kan regleras bort. Detta visar vi genom att studera det generella fallet.

Det generella fallet Antag att processen och regulatorn har överföringsfunktionerna

$$G_P(s) = \frac{K_P B_P(s)}{s^p A_P(s)} e^{-sL} \qquad G_R(s) = \frac{K B_R(s)}{s^r A_R(s)}$$

där $A_P(0) = B_P(0) = A_R(0) = B_R(0) = 1$. Laststörningen beskriver vi som

$$L(s) = \frac{1}{s^{m+1}}$$

Mätsignalen för detta generella exempel blir

$$Y(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} L(s) = \frac{s^r A_R K_P B_P e^{-sL}}{s^{r+p} A_P A_R + K B_R K_P B_P e^{-sL}} \cdot \frac{1}{s^{m+1}}$$

Med hjälp av slutvärdesteoremet kan vi nu räkna ut det stationära felet.

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{A_R K_P B_P e^{-sL}}{s^{r+p} A_P A_R + K B_R K_P B_P e^{-sL}} \cdot \frac{s^r}{s^m}$$

naturligtvis under förutsättning att gränsvärdet existerar. Eftersom $A_P(0) = B_P(0) = A_R(0) = B_R(0) = 1$ och $e^{-sL} \to 1$ då $s \to 0$ gäller att

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{K_P}{s^{r+p} + K K_P} s^{r-m}$$

Vi ser alltså att det är antalet integratorer r i regulatorn som avgör om vi får något kvarstående reglerfel. Vi får följande fall beroende på förhållandet mellan m och r:

$r > m$	$y_\infty = 0$
$r = m = 0, \quad p = 0$	$y_\infty = \dfrac{K_P}{1 + K K_P}$
$r = m = 0, \quad p \geq 1$	$y_\infty = \dfrac{1}{K}$
$r = m \geq 1$	$y_\infty = \dfrac{1}{K}$
$r < m$	Gränsvärde saknas

I exempel 7.2 studerade vi stegändringar i lasten, det vill säga $m = 0$. I det första delexemplet hade vi en integrator i regulatorn, vilket innebär att $r = 1$. Enligt tabellen ovan innebär det att $y_\infty = 0$, vilket stämmer med exemplet. I det andra delexemplet fanns det ingen integrator i regulatorn, men en integrator i processen. Detta innebär att $r = 0$ och $p = 1$ och enligt tabellen ska det ge det stationära felet $y_\infty = 1/K$, vilket också stämmer med exemplet.

Den analys vi nu har gjort visar varför man så ofta vill ha en integrator i regulatorn. En integrator i regulatorn garanterar nämligen att man inte får något kvarstående reglerfel efter stegändringar oavsett om dessa sker i referensvärdet eller i form av laststörningar.

Föreläsning 8

Tillståndsåterkoppling

Vi ska nu övergå till syntes av reglersystem. Denna kommer vi att utföra i flera av de olika modellrepresentationer som vi gick igenom i början på kursen. Vi inleder med att bestämma regulatorer i tillståndsrepresentationen.

8.1 Tillståndsåterkoppling

Vi antar att den process vi ska reglera är beskriven på tillståndsform, det vill säga

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{8.1}$$

För enkelhets skull har vi antagit att processen inte har någon direktterm, det vill säga att matrisen $D = 0$. Detta är ett realistiskt antagande eftersom det är ovanligt att processer har direkttermer.

Processens överföringsfunktion ges av

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s)$$

där nämnarpolynomet

$$\det(sI - A)$$

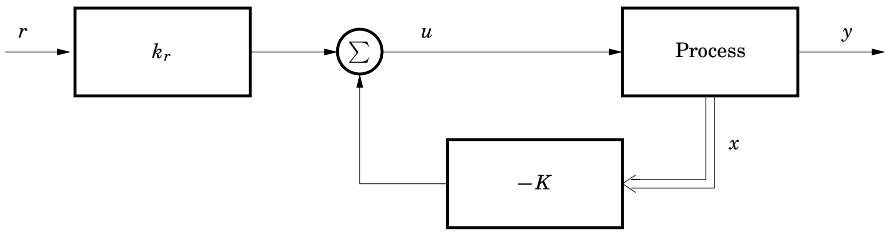
bildar processens karaktäristiska polynom.

Vi antar nu att vi kan mäta samtliga tillstånd i processen. Detta är naturligtvis orealistiskt i de flesta fall, men längre fram i kursen ska vi se att vi kan släppa detta krav genom att vi kan beräkna tillstånden ur de enda signaler vi normalt har tillgång till, nämligen styrsignalen och mätsignalen. Regulatorstrukturen visas i figur 8.1. Ekvationen för regulatorn är

$$u = k_r r - k_1 x_1 - k_2 x_2 - \cdots - k_n x_n = k_r r - Kx \tag{8.2}$$

där vektorerna K och x ges av

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$



Figur 8.1 Tillståndsåterkoppling

Vid tillståndsåterkoppling bildas styrsignalen alltså helt enkelt genom att man tar samtliga tillstånd plus referensvärdet, multiplicerar dem med varsin faktor och därefter summerar alla bidrag.

Slutna systemet Om vi kombinerar styrlagen (8.2) med processmodellen (8.1) får vi tillståndsbeskrivningen för det slutna systemet:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + Bk_r r \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{8.3}$$

där nu referensvärdet r är den nya insignalen. Motsvarande överföringsfunktion ges av

$$Y(s) = C(sI - (A - BK))^{-1} Bk_r R(s)$$

där karaktäristiska polynomet nu ändrats till

$$\det(sI - (A - BK))$$

Matrisen A hos det öppna systemet (8.1) har genom tillståndsåterkopplingen ändrats till $A - BK$ i det slutna systemet (8.3). Eftersom vi själva väljer vektorn K har vi här en möjlighet att bestämma egenvärdena till den nya matrisen.

Regulatorparametern k_r påverkar uppenbarligen inte slutna systemets poler. Vi kommer tills vidare att välja k_r så att slutna systemets statiska förstärkning blir ett för att på så sätt försöka uppnå att $y = r$ stationärt. (Längre fram kommer vi att införa integralverkan för att uppnå detta mål.)

Vi illustrerar syntesmetoden med ett exempel:

Exempel 8.1—Tillståndsåterkoppling av elektrisk motor
Överföringsfunktionen för en elektrisk motor är

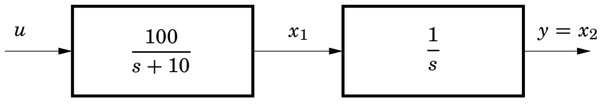
$$G_P(s) = \frac{100}{s(s+10)}$$

där insignalen är strömmen in till motorn och utsignalen är motorns vinkel. Överföringsfunktionen kan delas upp i två delar enligt figur 8.2, där vi inte bara markerat in- och utsignalen utan även motorns vinkelhastighet. Om vi inför vinkeln och vinkelhastigheten som tillstånd kan vi beskriva processen på tillståndsform. Den blir

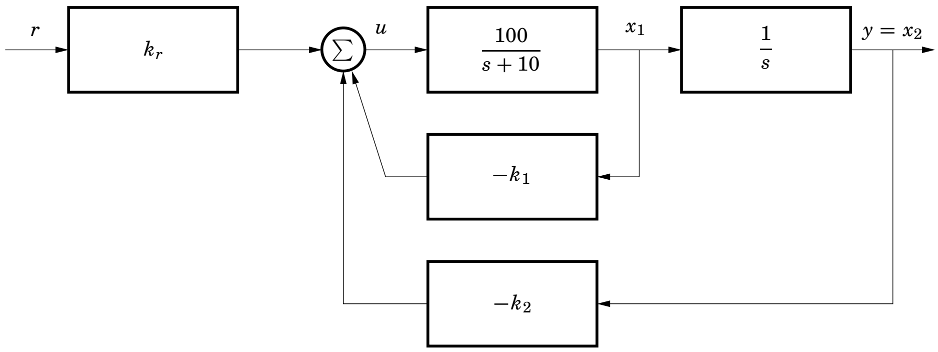
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -10x_1 + 100u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$



Figur 8.2 Blockschema för motorn i exempel 8.1. Tillståndet x_1 svarar mot vinkelhastigheten och tillståndet x_2 mot vinkeln.



Figur 8.3 Tillståndsåterkoppling av motorn i exempel 8.1.

Nu återkopplar vi från vinkeln och vinkelhastigheten enligt figur 8.3. Styrlagen

$$u = k_r r - k_1 x_1 - k_2 x_2 = k_r r - Kx$$

ger det slutna systemet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -10 - 100k_1 & -100k_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} k_r r$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Det karaktäristiska polynomet blir

$$\det(sI - (A - BK)) = \begin{vmatrix} s + 10 + 100k_1 & 100k_2 \\ -1 & s \end{vmatrix}$$
$$= s^2 + (10 + 100k_1)s + 100k_2$$

Eftersom vi med regulatorparametrarna k_1 och k_2 kan åstadkomma ett godtyckligt andra ordningens karaktäristiskt polynom kan vi placera slutna systemets poler var vi vill. Antag att det önskade slutna systemets karaktäristiska polynom ges av

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$$

Då får vi följande regulatorparametrar

$$k_1 = \frac{2\zeta\omega - 10}{100} \qquad k_2 = \frac{\omega^2}{100}$$

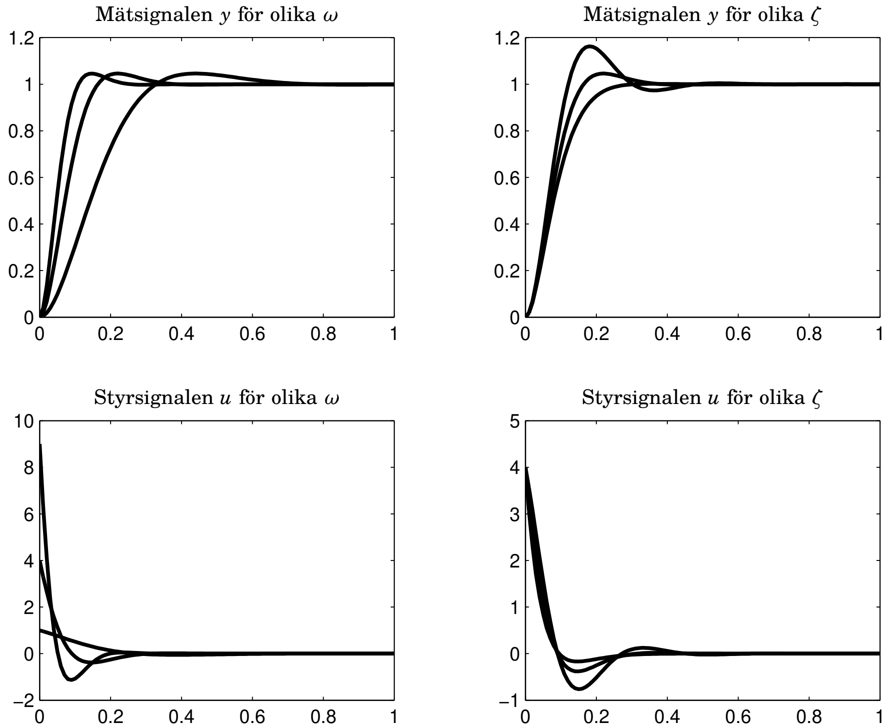
Nu återstår det att bestämma parametern k_r så att $y = r$ stationärt. Man kan alltid bestämma k_r genom att räkna ut slutna systemets överföringsfunktion och därefter se till att $G(0) = 1$, det vill säga att statiska förstärkningen blir ett. Det är oftast dock enklare att direkt i tillståndsbeskrivningen undersöka det stationära förhållandet då $\dot{x} = 0$. I vårt exempel gäller att

$$\dot{x} = 0 = \begin{pmatrix} -10 - 100k_1 & -100k_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} k_r r$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Den andra tillståndsekvationen säger att $x_1 = 0$ stationärt. Att så måste vara fallet är ju klart eftersom x_1 är vinkelhastigheten. Stoppar vi in $x_1 = 0$ i den första ekvationen och utnyttjar att $y = x_2$ ser vi att $y = r$ stationärt då

$$k_r = k_2$$



Figur 8.4 Tillståndsåterkoppling av motorn i exempel 8.1. De vänstra figurerna visar regleringen för $\zeta = 0.7$ och $\omega = 10$, 20 och 30, där den snabbaste regleringen svarar mot den högsta frekvensen. De högra figurerna visar regleringen för $\omega = 20$ och $\zeta = 0.5$, 0.7 och 0.9, där den mest dämpade regleringen svarar mot den största relativa dämpningen.

Vi är nu färdiga med vår syntes. I figur 8.4 visas stegsvaren får några olika val av designparametrarna ζ och ω. Figuren visar att designparametern ω är ett effektivt sätt att specificera snabbheten hos systemet och att den relativa dämpningen ζ är ett bra mått på dämpningen hos systemet. □

8.2 Styrbarhet

I föregående exempel kunde vi med tillståndsåterkoppling placera slutna systemets poler var vi ville. En intressant fråga är om man alltid kan göra det. Vi inleder med ett exempel.

EXEMPEL 8.2—STYRBARHET
Antag att processen vi ska reglera beskrivs av följande ekvationer.

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = Cx + Du$$

Eftersom A-matrisen är diagonal ser man direkt att dess egenvärden, och därmed också processens poler, ligger i -1 och -2. Med tillståndsåterkoppling kommer matrisen att bli

$$A - BK = \begin{pmatrix} -1 - k_1 & -k_2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss slutna systemets karaktäristiska polynom

$$\det(sI - (A - BK)) = (s + 1 + k_1)(s + 2)$$

Här ser vi att vi inte kan placera polerna godtyckligt. Med hjälp av k_1 kan vi flytta polen som låg i -1, men polen i -2 kan vi inte flytta. Vi ser också att parametern k_2 inte finns med i det karaktäristiska polynomet. Vi har alltså inte någon nytta av att mäta tillståndet x_2 och återkoppla från det.

Orsaken till vårt problem ser vi tydligt i tillståndsbeskrivningen. Den andra ekvationen där ges av

$$\dot{x}_2 = -2x_2$$

och är helt opåverkad av styrsignalen u. Detta tillstånd kan vi därför inte styra. □

Vi kommer nu in på begreppet styrbarhet. Styrbarhet definieras på följande sätt:

> En tillståndsvektor x_0 är styrbar om det finns en styrsignal som överför tillståndsvektorn x från origo till x_0 på ändlig tid. Ett system är styrbart om samtliga tillstånd är styrbara.

Om ett system är styrbart kan vi med tillståndsåterkoppling placera samtliga poler godtyckligt. Som vi ser av definitionen har styrbarhet ingenting med utsignalen y att göra. Definitionen rör tillståndsvektorn och styrsignalen. I tillståndsrepresentationen (8.1) ser vi att detta innebär att styrbarheten enbart avgörs av matriserna A och B.

Om ett system är styrbart eller ej kan bestämmas genom att studera den så kallade styrbarhetsmatrisen som definieras på följande sätt:

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

där n är systemets ordning. Man kan visa att ett system är styrbart om och endast om styrbarhetsmatrisen W_s har n linjärt oberoende kolonner. I det fall systemet inte är styrbart visar kolonnerna i W_s vilka tillstånd som är styrbara. Detta illustreras i exemplen nedan.

Vi undersöker styrbarheten för de två exempel vi studerat tidigare i föreläsningen.

EXEMPEL 8.3—STYRBARHET

I exempel 8.1 studerade vi en elektrisk motor som beskrevs med ekvationerna

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

För denna process blir styrbarhetsmatrisen

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & -1000 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Denna matris har uppenbarligen linjärt oberoende kolonner. Ett sätt att ta reda på om en kvadratisk matris har linjärt oberoende kolonner är att kontrollera att determinanten är skild från noll. Eftersom W_s har linjärt oberoende kolonner är processen styrbar. Det såg vi redan i exempel 8.1, eftersom vi kunde placera polerna var vi ville.

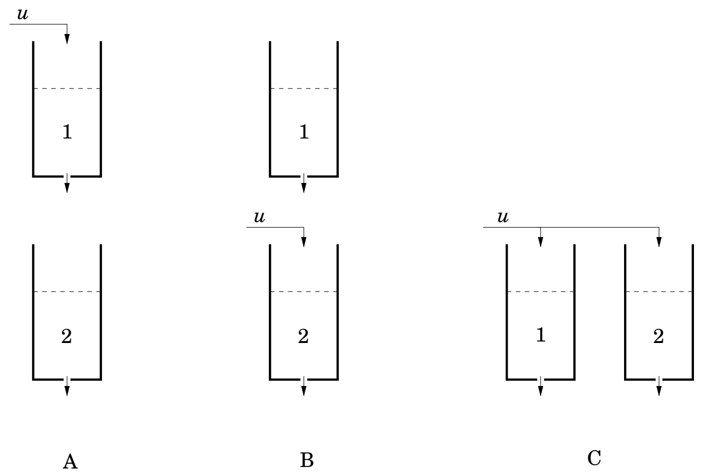
Låt oss nu undersöka styrbarheten i exempel 8.2. Där ges A- och B-matriserna av

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss styrbarhetsmatrisen

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Denna matris har inte linjärt oberoende kolonner och det $W_s = 0$. Systemet i exempel 8.2 är alltså inte styrbart. Kolonnerna i W_s visar också att x_1 är ett styrbart tillstånd medan x_2 inte är styrbart. □



Figur 8.5 Olika kopplingar av inflöden och vattentankar leder till olika fall av styrbarhet.

Exempel på styrbarhet

Styrbarhet är ett abstrakt begrepp. Oftast bygger man processer på ett sådant sätt att man har styrbarhet vad gäller de tillstånd som man vill styra. Styrbarhetsbegreppet är trots det viktigt och bra att ha en känsla för. Vi kommer att se det längre fram i kursen.

För att öka förståelsen för styrbarhetsbegreppet ska vi nu undersöka några fysikaliska processer med avseende på styrbarheten. De processer vi undersöker illustreras i figur 8.5 och består av olika kopplingar av vattentankar och flöden.

Genom att ställa upp massbalansen för en enstaka vattentank får vi en enkel modell av dess dynamik. Om vi betecknar nivån i en tank med x gäller att

$$\dot{x} = q_{in} - q_{ut}$$

där q_{in} betecknar inflödet till tanken och q_{ut} betecknar utflödet från tanken. Varje vattentank har ett hål i botten som gör att de har ett utflöde som är ungefär proportionellt mot nivån i respektive tank. Inflödet till en tank kan dels bestå av utflödet från en tank ovanför, dels kan den bestå av ett tillflöde u som vi låter vara vår styrsignal.

Process A: Betrakta först Process A i figur 8.5. I detta fall kommer det styrda flödet in i den övre tanken. Det ger oss följande balansekvationer:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - ax_1 \\ \dot{x}_2 &= ax_1 - ax_2 \end{aligned}$$

där x_1 och x_2 betecknar nivåerna i övre respektive under tanken. Den första ekvationen säger att inflödet till den övre tanken är u och att utflödet är proportionellt mot nivån i tanken. Den andra ekvationen säger att inflödet till den undre tanken är detsamma som utflödet från den övre tanken, och att utflödet från den undre tanken är proportionellt mot nivån i tanken.

Dynamiken för Process A kan skrivas som

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Styrbarhetsmatrisen blir därför

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Denna matris har linjärt oberoende kolonner, determinanten är $\det W_s = a \neq 0$ och systemet är styrbart. Styrbarhetsmatrisens kolonner visas grafiskt i Figur 8.6, där det tydligt framgår att de är linjärt oberoende. Detta betyder att vi kan styra båda nivåerna till godtyckliga värden. Det är ju vad definitionen på styrbarhet säger. Observera att definitionen inte säger att vi behöver kunna ligga stilla vid godtyckliga nivåer. Man inser ju genom att studera figuren och ekvationerna att de enda nivåerna man kan ligga stilla vid är sådana nivåer där

$$u = ax_1 = ax_2$$

Stationärt har vi alltså alltid samma nivå i de båda tankarna.

Slutligen måste vi tänka på ekvationernas giltighet. I verkligheten gäller ju att nivåerna inte kan bli negativa och att inte heller styrsignalen kan bli negativ, förutsatt att vi inte kan suga ut vatten genom ledningen. Detta innebär alltså att $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ och $u \geq 0$.

Process B: Betrakta nu Process B i figur 8.5. I detta fall kommer det styrda flödet in i den undre tanken. Detta bör ju innebära att vi inte längre kan styra nivån i den övre tanken. Låt oss undersöka om detta faller ut av analysen.

Följande balansekvationer gäller för Process B:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 \\ \dot{x}_2 &= u + ax_1 - ax_2 \end{aligned}$$

Dynamiken för Process B kan därför skrivas som

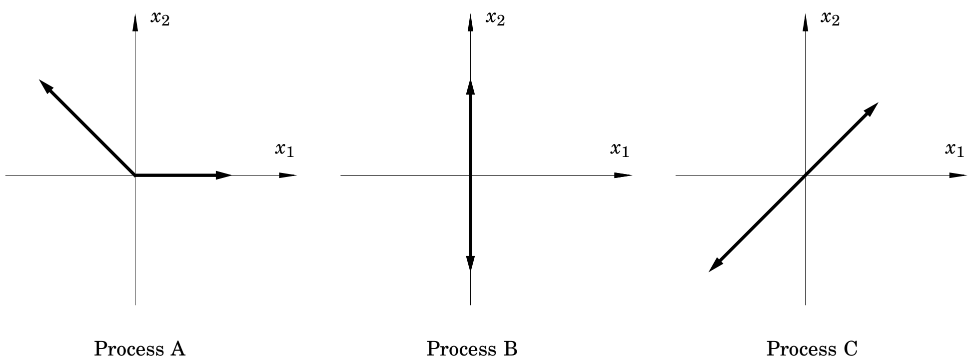
$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Styrbarhetsmatrisen blir därför

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

Denna matris har linjärt beroende kolonner, determinanten är $\det W_s = 0$ och systemet är alltså inte styrbart. Kolonnerna i W_s visar också att det är den undre tanken vi kan styra och den övre tanken som inte är styrbar. Detta framgår också av Figur 8.6.

Process C: I Process C i figur 8.5 kommer det styrda flödet in till båda tankarna, så att halva flödet går till tank 1 och halva flödet till tank 2.



Figur 8.6 Styrbarhetsmatrisens kolonner i de tre exemplen.

Följande balansekvationer gäller för Process C:

$$\dot{x}_1 = 0.5u - ax_1$$
$$\dot{x}_2 = 0.5u - ax_2$$

Dynamiken för Process C kan därför skrivas som

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} u$$

Styrbarhetsmatrisen blir

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5a \\ 0.5 & -0.5a \end{pmatrix}$$

Denna matris har linjärt beroende kolonner, determinanten är $\det W_s = 0$ och systemet är alltså inte styrbart. Konstruktionen är sådan att om nivåerna från början är lika i de två tankarna kommer de alltid att förbli lika. Detta visar också kolonnerna i W_s och illustrationen i Figur 8.6.

Föreläsning 9

Kalmanfiltrering

I föregående föreläsning inledde vi syntesdelen i kursen med att introducera tillståndsåterkoppling. Den metod vi presenterade hade flera allvarliga begränsningar som vi ska eliminera i denna föreläsning. För det första byggde tillståndsåterkopplingen på att vi kunde mäta samtliga tillstånd. Det kan man normalt inte. I denna föreläsning ska vi beskriva Kalmanfiltret, vilket är en metod för att filtrera fram en skattning av tillståndsvektorn ur styrsignalen och mätsignalen.

En annan allvarlig begränsning var att regulatorn saknade integralverkan och att man därför riskerade att få kvarstående stationära reglerfel.

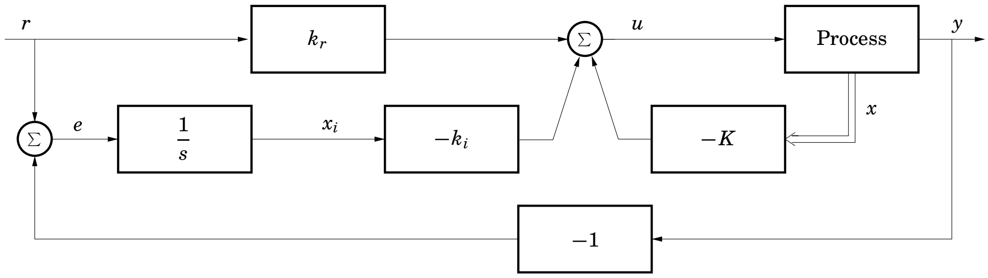
9.1 Integralverkan

Vi inleder med att införa integralverkan i regulatorn. I figur 8.1 visas blockschemat för den ursprungliga tillståndsåterkopplingen. Parametern k_r valde vi så att statiska förstärkning mellan referensvärdet r och mätsignalen y blev ett. Detta garanterar dock inte att $y = r$ stationärt. En ändring i lasten kommer t.ex. att föra mätsignalen bort från referensvärdet.

I figur 9.1 visas hur man kan komplettera tillståndsåterkopplingen med en integralterm. Vi bildar först reglerfelet e som differensen mellan referensvärdet r och mätsignalen y, som vi ju inte har använt tidigare vid tillståndsåterkopplingen. Därefter integrerar vi reglerfelet och multiplicerar det med en förstärkning som vi i detta sammanhang betecknar k_i. Slutligen adderar vi bidraget från integraltermen till styrsignalen u.

Att på detta sätt addera en integralterm till styrsignalen är inte konstigare än att addera en integralterm till en P-regulator och därigenom bygga en PI-regulator.

Integraltermen kommer naturligtvis att påverka det slutna systemets poler. För att kunna använda samma metodik som i föregående föreläsning ska vi därför beskriva integraltermen som en del i tillståndsbeskrivningen för det slutna systemet. Vi vill skriva det slutna systemet på tillståndsform där referensvärdet r är systemets instignal.



Figur 9.1 Tillståndsåterkoppling med integralverkan

Utgå från processens tillståndsbeskrivning:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{9.1}$$

Inför nu ett extra tillstånd, x_i, enligt figur 9.1. Det ges av ekvationen

$$x_i = \int (r-y)dt \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_i = r - y = r - Cx$$

Om vi utvidgar tillståndsvektorn x med integraltillståndet x_i så att

$$x_e = \begin{pmatrix} x \\ x_i \end{pmatrix}$$

kan vi skriva det utvidgade systemet på följande sätt.

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} x_e + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r = A_e x_e + B_e u + B_r r \\ y &= \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} x_e = C_e x_e \end{aligned} \tag{9.2}$$

Eftersom vi vill ta fram slutna systemets tillståndsbeskrivning ska vi eliminera styrsignalen u från ekvation (9.2). Styrsignalen ges av

$$u = k_r r - Kx - k_i x_i = k_r r - K_e x_e$$

där

$$K_e = \begin{pmatrix} K & k_i \end{pmatrix}$$

Stoppar vi in detta uttryck för u i ekvation (9.2) får vi tillståndsbeskrivningen för det slutna systemet:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= (A_e - B_e K_e)x_e + (B_e k_r + B_r)r \\ y &= C_e x_e \end{aligned}$$

Vi har alltså genom att utvidga tillståndsbeskrivningen med ett tillstånd som är lika med integralen av reglerfelet fått en regulator med integralverkan. I stationaritet gäller att $\dot{x}_e = 0$ och därmed speciellt att $\dot{x}_i = r - y = 0$.

Parametrarna i vektorn K_e bestämmer vi precis som tidigare så att slutna systemets poler placeras där vi vill. De ges av det karaktäristiska polynomet

$$\det(sI - (A_e - B_e K_e))$$

Parametern k_r behövs nu inte längre för att försöka uppnå $y = r$ stationärt. Den påverkar inte slutna systemets poler, bara dess nollställen. Den kan lämpligen väljas så att systemet får önskade transienta egenskaper vid referensvärdesändringar. Vi ska prata mer om val av nollställen i senare föreläsningar.

9.2 Observerbarhet

Hittills har vi förutsatt att vi kan mäta samtliga tillstånd i processen. Detta är normalt inte möjligt, men om man kan beräkna tillståndsvektorn genom att studera styrsignalen och mätsignalen kan man i stället använda de beräknade eller skattade tillstånden i återkopplingen.

I exempel 8.1 använde vi tillståndsåterkoppling för att styra en elektrisk motor, där mätsignalen var motorns vinkel och där det andra tillståndet var motorns vinkelhastighet. Om man inte kan mäta vinkelhastigheten kan man ju skatta den genom att t.ex. derivera vinkelsignalen.

Innan vi beskriver hur man skattar tillståndsvektorn ska vi ställa oss den principiella frågan om det överhuvud taget går att skatta tillståndsvektorn genom att bara studera u och y. Svaret på frågan är att det går om systemet är *observerbart*. Observerbarhet definieras på följande sätt:

> En tillståndsvektor $x_0 \neq 0$ är icke observerbar (tyst) om utsignalen $y(t) = 0$ då initialtillståndet är $x(0) = x_0$ och insignalen är $u(t) = 0$. Ett system är observerbart om det saknar icke observerbara tillstånd.

Som vi ser av definitionen har observerbarhet ingenting med styrsignalen u att göra. Definitionen rör tillståndsvektorn och mätsignalen. I tillståndsrepresentationen (9.1) ser vi att detta innebär att observerbarheten enbart avgörs av matriserna A och C.

Om ett system är observerbart eller ej kan bestämmas genom att studera den så kallade observerbarhetsmatrisen som definieras på följande sätt:

$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

där n är systemets ordning. Man kan visa att ett system är observerbart om och endast om observerbarhetsmatrisen W_o har n linjärt oberoende rader. Om x_0 är ett icke observerbart tillstånd uppfyller det ekvationen

$$W_o x_0 = 0$$

Som vi ser har observerbarhet och observerbarhetsmatrisen stora likheter med styrbarhet och styrbarhetsmatrisen som vi studerade i föregående föreläsning. Vi studerar ett exempel på observerbarhet.

Exempel 9.1—Observerbarhet

En process beskrivs av följande ekvationer:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

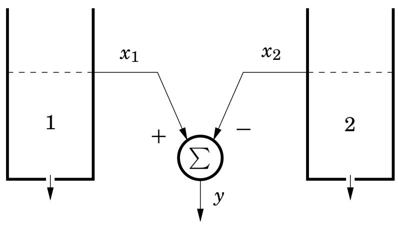
Vi kan t.ex. tänka oss att ekvationerna beskriver processen i figur 9.2, där tillstånden beskriver nivåerna i respektive tank. Mätsignalen bildas av differensen mellan de två nivåerna. Vi har ingen insignal till systemet, utan studerar enbart förloppen efter olika initialtillstånd hos de två nivåerna.

Vi ska nu undersöka observerbarheten för processen. Observerbarhetsmatrisen blir

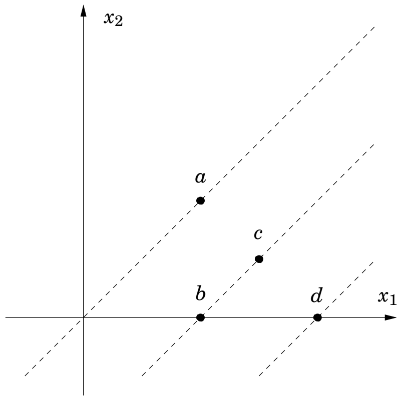
$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Raderna till denna matris är inte linjärt oberoende, determinanten är $\det W_o = 0$ och systemet är alltså inte observerbart. Ur ekvationen

$$W_o x_0 = 0$$



Figur 9.2 En fysikalisk tolkning av processdynamiken i exempel 9.1



Figur 9.3 Olika initialtillstånd i exempel 9.1

ser vi att de icke observerbara tillstånden kan skrivas som

$$x_0 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

Om vi går tillbaka till definitionen på observerbarhet ser vi att detta stämmer. Om initialnivåerna i de två tankarna är lika kommer de att tömmas på precis samma sätt. Eftersom nivåerna alltså hela tiden är lika kommer mätsignalen att förbli $y = 0$.

I figur 9.3 visas fyra olika initialtillstånd för nivåerna i de två tankarna. Motsvarande svar i utsignalen y visas i figur 9.4 Initialtillståndet a är ett icke observerbart tillstånd. Därför är mätsignalen $y = 0$. Initialtillståndet b ger ett svar i mätsignalen, men svaret är identiskt med det vi får vid initialtillståndet c. Alla initialtillstånd som har samma differens mellan nivåerna x_1 och x_2 kommer att ge samma svar i mätsignalen y och går alltså inte att skilja åt. Initialtillståndet d ger ett svar som skiljer sig från de övriga, eftersom vi där har en annan differens mellan x_1 och x_2. □

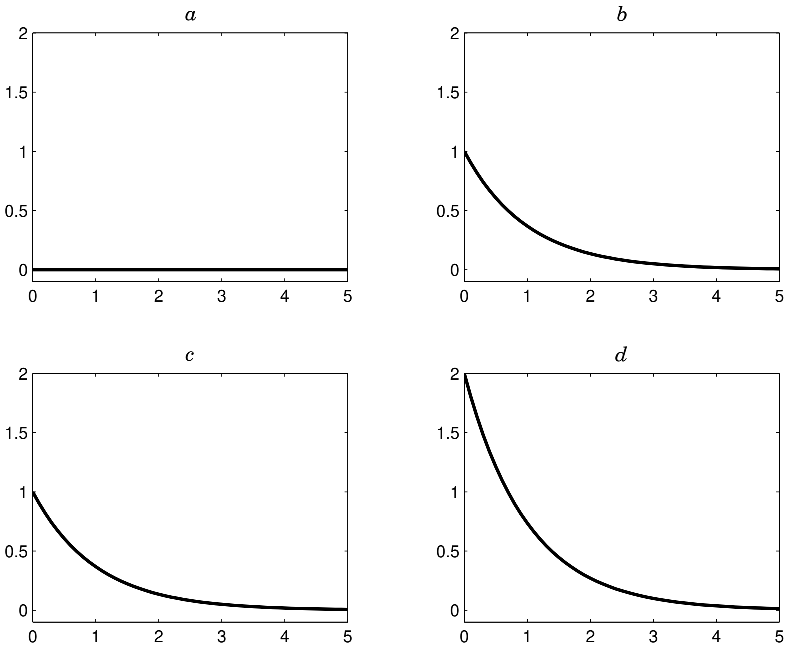
9.3 Kalmanfiltrering

När systemet är observerbart går det att skatta tillståndsvektorn genom att studera insignalen u och utsignalen y. Det vanligaste sättet att göra detta på är att filtrera in- och utsignalen genom ett Kalmanfilter. Vi ska härleda Kalmanfiltret i två steg. Som ett första steg ska vi se vad som händer om vi försöker skatta x genom att helt enkelt simulera processen.

Tillståndsskattning genom simulering

Förutsättningen för tillståndsskattningen är att processen är känd och given på tillståndsform, samt att vi har tillgång till styrsignalen u och mätsignalen y. Vi kan då simulera processen på följande sätt:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$



Figur 9.4 Mätsignalen y vid de olika initialtillstånden i figur 9.3

där $\hat{x}$ är skattningen av tillståndsvektorn x. Vi simulerar med andra ord processen och driver simuleringen med samma styrsignal u som skickas till den verkliga processen. Fungerar detta? Kommer den skattade tillståndsvektorn $\hat{x}$ att konvergera mot x?

Inför skattningsfelet

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

Derivatan av skattningsfelet blir

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu = A\tilde{x}$$

Om skattningsfelet går mot noll avgörs med andra ord av matrisen A. Om A har alla egenvärden i vänstra halvplanet, det vill säga om processen är asymptotiskt stabil, kommer skattningsfelet att gå mot noll. Hur snabbt felet avtar bestäms av var i vänstra halvplanet egenvärdena ligger.

Att skatta tillståndsvektorn genom att simulera processen fungerar alltså ibland. Vid skattningen utnyttjar vi styrsignalen u, men vi utnyttjar inte informationen vi har i mätsignalen y. Motsvarande brist har metoden att skatta tillstånd genom att derivera mätsignalen. Om man t.ex. skattar motorns vinkelhastighet i exempel 8.1 genom att derivera vinkelsignalen utnyttjar man inte informationen som finns i styrsignalen. Kalmanfiltret är däremot en metod som utnyttjar både styrsignalen och mätsignalen vid skattning av tillståndsvektorn.

Kalmanfiltrering

I Kalmanfiltret skattas tillståndsvektorn på följande sätt:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned} \tag{9.3}$$

Jämfört med den enkla simuleringsmetoden har vi nu infört en korrektionsterm, där skillnaden mellan den verkliga mätsignalen y och den skattade mätsignalen $\hat{y}$ påverkar skattningen.

Genom att slå ihop de två ekvationerna i ekvation (9.3) kan vi skriva Kalmanfiltret som

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \tag{9.4}$$

Här ser vi tydligt hur Kalmanfiltret drivs av de två tillgängliga signalerna u och y.

För Kalmanfiltret avtar rekonstruktionsfelet $\tilde{x}$ på följande sätt:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - LC(x - \hat{x}) \\ &= (A - LC)\tilde{x}\end{aligned}$$

Kalmanfiltrets egenskaper bestäms nu inte längre enbart av matrisen A, utan av matrisen $A - LC$, där vi själva bestämmer vektorn L. Vi kan alltså själva bestämma hur snabbt rekonstruktionsfelet $\tilde{x}$ ska avta. Valet är en kompromiss mellan snabbhet och känslighet för störningar och modellfel. Hur förstärkningsvektorn L kan bestämmas visar vi i följande exempel.

EXEMPEL 9.2—KALMANFILTERING AV PENDELDYNAMIK

I exemplet ska vi försöka balansera en inverterad pendel. Regleringen lämnar vi till nästa föreläsning och nöjer oss här med att försöka skatta tillstånden hos processen. Pendeln som ska regleras visas i figur 9.5.

Vi antar att vi kan mäta vinkeln φ som alltså blir vår mätsignal, det vill säga $y = \varphi$. Målet för regleringen är att balansera pendeln så att $y = \varphi = 0$. Referensvärdet kommer därför genomgående att vara $r = 0$. Styrsignalen u är proportionell mot kraften som påverkar vagnen. Vi antar för enkelhets skull att $u = \ddot{z}$.

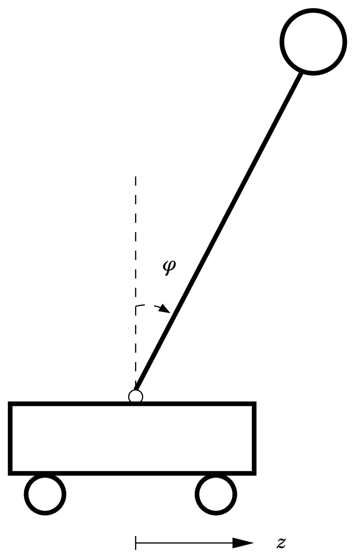
Det finns två krafter som påverkar pendeln. Tyngdkraften vill öka vinkeln φ och få pendeln att ramla nedåt. Styrsignalen kan ge pendeln en acceleration i motsatt riktning och därmed resa upp pendeln igen.

En momentekvation med lämpliga normeringar, linjäriseringar och parameterval ger följande andra ordningens modell för pendelprocessen:

$$\ddot{\varphi} = \varphi - u$$

Ett andra ordningens system kräver minst två tillstånd för att representeras på tillståndsform. Vi väljer vinkeln φ och dess derivata $\dot{\varphi}$ som tillstånd:

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi \\ x_2 &= \dot{\varphi}\end{aligned}$$



Figur 9.5 Pendeln i exempel 9.2

Detta ger följande tillståndsbeskrivning av processen:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x = Cx$$

Ett Kalmanfilter som skattar tillståndsvektorn ges av ekvation (9.4) där vår uppgift nu är att bestämma vektorn L så att matrisen $A - LC$ får önskade egenvärden. Vi får

$$A - LC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 & 1 \\ 1 - l_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till matrisen ges av det karaktäristiska polynomet:

$$\det(sI - (A - LC)) = \begin{vmatrix} s + l_1 & -1 \\ -1 + l_2 & s \end{vmatrix} = s^2 + l_1 s - 1 + l_2$$

Vi kan nu placera de två polerna godtyckligt genom att välja l_1 och l_2. Antag t.ex. att vi vill placera polerna i $s = -4 \pm 4i$. Det ger oss ett önskat karaktäristiskt polynom

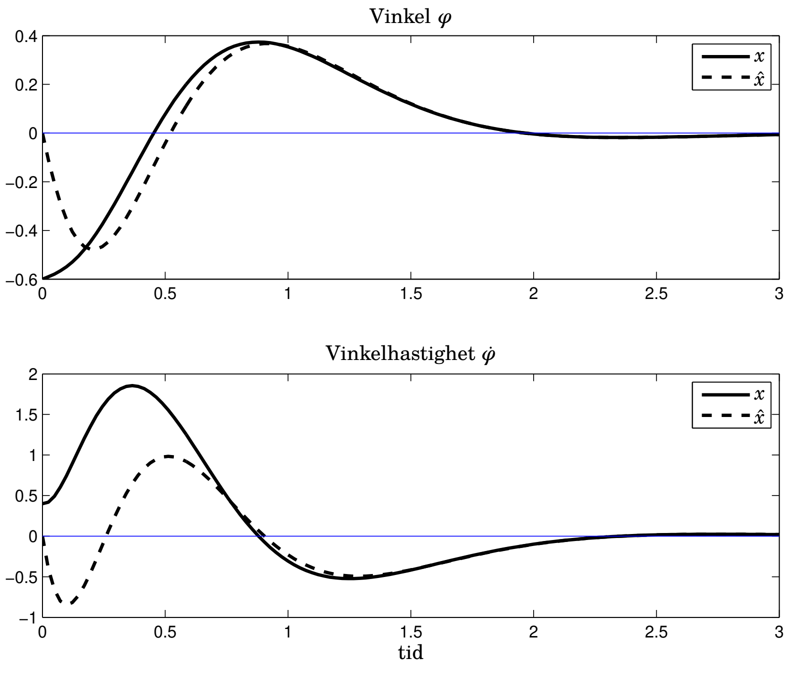
$$(s + 4 - 4i)(s + 4 + 4i) = s^2 + 8s + 32$$

Genom att jämföra de två polynomen får vi följande parametrar i Kalmanfiltret:

$$l_1 = 8 \qquad l_2 = 33$$

Figur 9.6 visar resultatet av ett simuleringsexperiment med Kalmanfiltret. Initialtillståndet är $\varphi(0) = -0.6$ och $\dot{\varphi}(0) = 0.4$. Eftersom processen är instabil måste den regleras. Hur pendeln är reglerad bekymrar vi oss inte om nu, utan återkommer till det i nästa föreläsning.

De heldragna kurvorna i figur 9.6 visar de verkliga tillstånden. Vinkeln börjar vid $\varphi(0) = -0.6$, svänger över åt andra sidan till $\varphi \approx 0.4$ för att slutligen, efter ca 3 sekunder, stabiliseras vid $\varphi = 0$.



Figur 9.6 Verklig och skattad vinkel och vinkelhastighet för pendeln i exempel 9.2

De intressanta kurvorna är de streckade skattningarna. De startar båda i noll. Efter ca 1.5 sekund har de konvergerat och överensstämmer väl med de verkliga tillstånden. □

Exemplet visar att Kalmanfiltret kan skatta tillståndsvektorn. Man kan därför inse att det borde gå bra att använda de skattade tillstånden vid tillståndsåterkoppling i stället för de verkliga. Det är dock viktigt att Kalmanfiltret är tillräckligt snabbt, eftersom det transienta förloppet som vi ser i figur 9.6 kommer att upprepas varje gång processen störs, t.ex. genom att någon stöter till pendeln. Sambandet mellan Kalmanfiltret och tillståndsåterkopplingen kommer vi att undersöka närmare i nästa föreläsning.

Slutligen är det värt att notera att Kalmanfiltret inte bara är intressant för tillståndsåterkoppling. Metoden att beräkna variabler som inte är direkt mätbara genom kunskap om processens dynamik och tillgången till närliggande mätsignaler är intressant för många andra tillämpningar, såväl tekniska som biologiska, medicinska och ekonomiska.

Föreläsning 10

Utsignalåterkoppling. Pol/nollställe-förkortning

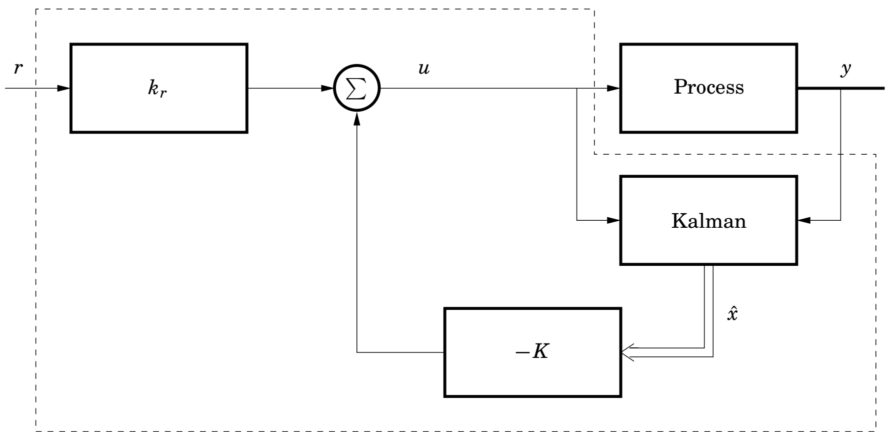
För två föreläsningar sedan gick vi igenom tillståndsåterkoppling och förutsatte då att vi kunde mäta samtliga tillstånd. Vi bestämde regulatorparametrar så att slutna systemets poler placerades lämpligt. I föregående föreläsning introducerade vi Kalmanfiltret som en metod att skatta tillståndsvektorn, och vi bestämde parametrar i filtret så att Kalmanfiltrets poler placerades lämpligt. I denna föreläsning ska vi undersöka vad som händer när vi kombinerar tillståndsåterkopplingen och Kalmanfiltret.

Förkortning av poler och nollställen i överföringsfunktioner är förknippat med förlust av styrbarhet och observerbarhet. Detta kommer vi att undersöka närmare i den andra delen av föreläsningen.

10.1 Utsignalåterkoppling

Vi ska nu koppla ihop tillståndsåterkopplingen och Kalmanfiltret, så att tillståndsåterkopplingen sker från de skattade tillstånden i stället för de verkliga. Vi kallar detta utsignalåterkoppling för att betona att vi nu inte längre återkopplar från processens tillstånd, utan enbart använder de tre mätbara signalerna referensvärdet r, mätsignalen y och styrsignalen u. Regulatorstrukturen visas i figur 10.1, där regulatorn består av allt innanför den streckade linjen. För att göra analysen enklare har vi valt att inte ta med integraltermen som vi introducerade i förra föreläsningen.

Processen beskriver vi som vanligt på tillståndsform där vi valt att inte ta med



Figur 10.1 Utsignalåterkoppling. Regulatorn består av allt innanför den streckade linjen.

direkttermen.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Regulatorn blir nu en kombination av Kalmanfiltret och tillståndsåterkopplingen:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \\ u &= k_r r - K\hat{x}\end{aligned}$$

Vi ska nu undersöka det slutna systemet och inleder med att göra det i tillståndsbeskrivningen. Det naturligaste hade varit att som tillståndsvektor välja processens tillstånd x tillsammans med Kalmanfiltrets tillstånd $\hat{x}$. Av skäl som visas senare ska vi dock inte göra det, utan väljer att kombinera processens tillstånd x med skattningsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$. Vi inför med andra ord tillståndsvektorn

$$x_e = \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$$

Tillståndsekvationerna kan vi nu skriva som

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax + Bk_r r - BK\hat{x} = Ax + Bk_r r - BK(x - \tilde{x}) \\ &= (A - BK)x + BK\tilde{x} + Bk_r r \\ \dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - LC(x - \hat{x}) = (A - LC)\tilde{x}\end{aligned}$$

På matrisform får vi därför

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Bk_r \\ 0 \end{pmatrix} r = A_e \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} + B_e r \\ y &= \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = C_e \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{10.1}$$

Tack vara att vi införde x och $\tilde{x}$ som tillstånd har vi nu fått ett antal nollor i matriserna A_e, B_e och C_e. Det kommer vi att ha stor nytta av när vi nu ska undersöka det slutna systemet.

På grund av att matrisen A_e är blocktriangulär ges dess karaktäristiska polynom av

$$\det(sI - A_e) = \det(sI - (A - BK)) \cdot \det(sI - (A - LC))$$

Detta är ett bra resultat. Det visar att det karaktäristiska polynomet består av produkten av det karaktäristiska polynom vi fick när vi gjorde tillståndsåterkoppling från de verkliga tillstånden och Kalmanfiltrets karaktäristiska polynom. Det betyder i sin tur att man kan dela upp reglerproblemet i två delar, precis som vi gjort i de föregående föreläsningarna. Man kan först bestämma tillståndsåterkopplingen och placera dess poler som om man verkligen kunde mäta samtliga tillstånd. Därefter kan man bestämma Kalmanfiltret och placera dess poler. När man sedan kopplar ihop tillståndsåterkopplingen med Kalmanfiltret så att man får en realiserbar utsignalåterkoppling kommer polerna att ligga kvar där man placerat dem.

Låt oss nu räkna ut överföringsfunktionen mellan r och y. Den ges av

$$G_e(s) = C_e(sI - A_e)^{-1}B_e = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$$

där

$$\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sI - (A - BK) & -BK \\ 0 & sI - (A - LC) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Bk_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Genom att multiplicera båda sidor med $(sI - A_e)$ får vi

$$\begin{pmatrix} Bk_r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sI - (A - BK) & -BK \\ 0 & sI - (A - LC) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (sI - (A - BK))E - BKF \\ (sI - (A - LC))F \end{pmatrix}$$

Den nedre delen av ekvationssystemet ger att $F = 0$. Detta innebär i sin tur att

$$E = (sI - (A - BK))^{-1} Bk_r$$

vilket slutligen ger överföringsfunktionen

$$G_e(s) = C(sI - (A - BK))^{-1} Bk_r$$

Detta är ett anmärkningsvärt resultat. Överföringsfunktionen är identisk med överföringsfunktionen vi fick när vi återkopplade från de verkliga tillstånden. Kalmanfiltrets dynamik syns inte i överföringsfunktionen. Karaktäristiska polynomet för matrisen A_e är av ordningen $2n$, medan överföringsfunktionen bara är av ordningen n.

I pendelexemplet vid föregående föreläsning såg vi hur de skattade tillstånden efter några sekunders transient konvergerade mot de verkliga. Efter denna transient är det naturligtvis ingen skillnad mellan att återkoppla från de skattade eller de verkliga tillstånden, så länge ingen störning får tillstånden att avvika från varandra igen. Det är detta som är anledningen till att överföringsfunktionen inte visar Kalmanfiltrets dynamik.

En n'te ordningens överföringsfunktion kan alltid beskrivas på tillståndsform med n tillstånd som är både styrbara och observerbara. Man kan mycket väl införa fler tillstånd, men dessa tillstånd kan inte vara både styrbara och observerbara. Det är till exempel fullt tillåtet att införa ett tillstånd som inte alls har med den aktuella processen att göra. Detta tillstånd kommer då varken att vara styrbart eller observerbart.

Om man som i vårt fall får ett lägre gradtal hos överföringsfunktionen än man hade på tillståndsformen betyder det att det finns tillstånd som inte är styrbara eller observerbara. I vårt fall är det Kalmanfiltrets tillstånd som inte är styrbara. Det kan vi se om vi bildar styrbarhetsmatrisen för systemet (10.1).

$$W_s = \begin{pmatrix} B_e & A_e B_e & \cdots & A_e^{n-1} B_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bk_r & (A - BK)Bk_r & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

Eftersom de sista n elementen i kolonnerna är noll kommer vi enbart att ha n linjärt oberoende kolonner och de icke styrbara tillstånden svarar mot Kalmanfiltrets tillstånd. Att Kalmanfiltrets tillstånd inte är styrbara kan vi direkt se i tillståndsbeskrivningen (10.1) eftersom dess ekvation ges av

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

Vi kan uppenbarligen inte påverka skattningarna med insignalen till det slutna systemet, det vill säga referensvärdet r.

Sammanfattning

Vi har nu gått igenom en metod för att bestämma en regulator, tillståndsåterkoppling kombinerat med Kalmanfiltrering. Analysen har visat att vi kan dela upp problemet i två delar.

Den första delen består i att skatta tillståndsvektorn med ett Kalmanfilter. Kalmanfiltrets egenskaper bestäms av förstärkningsvektorn L. Valet av denna, det vill säga valet av Kalmanfiltrets poler, är som vanligt en avvägning mellan kravet på prestanda och kravet på robusthet och okänslighet för modellfel, processvariationer och störningar.

Den andra delen består av tillståndsåterkopplingen. Här har analysen visat att vi kan behandla problemet som om vi har tillgång till de verkliga tillstånden. Återkopplingsvektorn K bestämmer var slutna systemets poler placeras. Även här består valet av en kompromiss mellan prestanda och robusthet. För att skillnaden mellan återkoppling från verkliga och skattade tillstånd inte ska bli alltför stor brukar man välja K så att tillståndsåterkopplingens poler blir minst en faktor två långsammare än Kalmanfiltrets poler. Detta är dock inget krav och det finns undantag från tumregeln.

Vi avslutar med att fullfölja pendelexemplet som vi påbörjade förra föreläsningen.

Exempel 10.1—Reglering av inverterad pendel

I exempel 9.2 och i figur 9.5 beskrev vi den inverterade pendeln och bestämde ett Kalmanfilter som skattar de två tillstånden

$$x_1 = \varphi$$
$$x_2 = \dot{\varphi}$$

i följande tillståndsbeskrivning av processen:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x = Cx$$

Vi antar nu till en början att vi kan mäta tillstånden och inför tillståndsåterkopplingen

$$u = -Kx$$

Eftersom referensvärdet alltid kommer att vara $r = 0$ finns det ingen anledning att ta med termen $k_r r$ i regulatorn. Vi bryr oss inte heller om att införa integralverkan i regulatorn. Det slutna systemet blir

$$\dot{x} = (A - BK)x$$
$$y = Cx$$

där

$$A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till matrisen ges av det karaktäristiska polynomet:

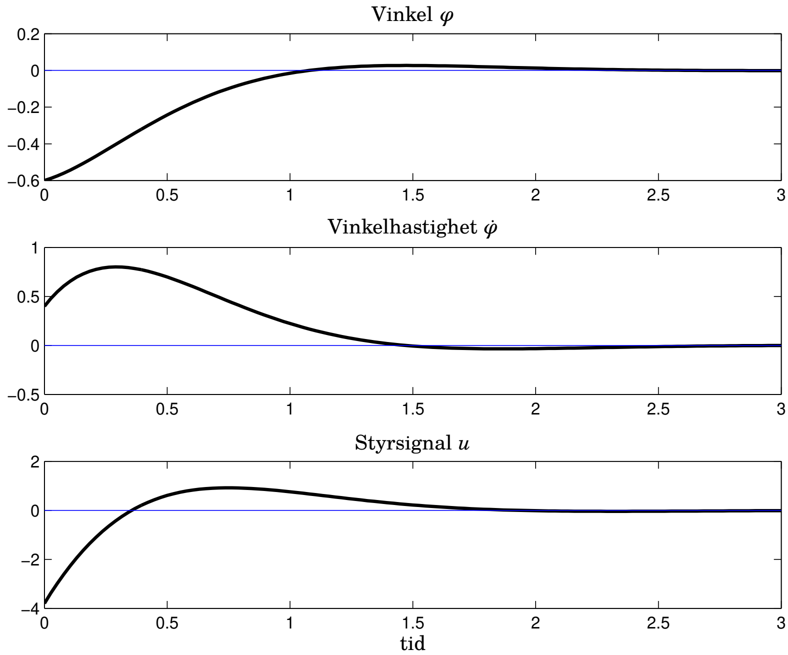
$$\det(sI - (A - BK)) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -1 - k_1 & s - k_2 \end{vmatrix} = s^2 - k_2 s - 1 - k_1$$

Vi kan nu placera de två polerna godtyckligt genom att välja k_1 och k_2. I exempel 9.2 placerades Kalmanfiltrets poler i $s = -4 \pm 4i$. Det är rimligt att välja tillståndsåterkopplingens poler långsammare. Vi väljer två poler som ligger hälften så långt bort från origo, det vill säga i $s = -2 \pm 2i$. Det ger oss det önskade karaktäristiska polynomet

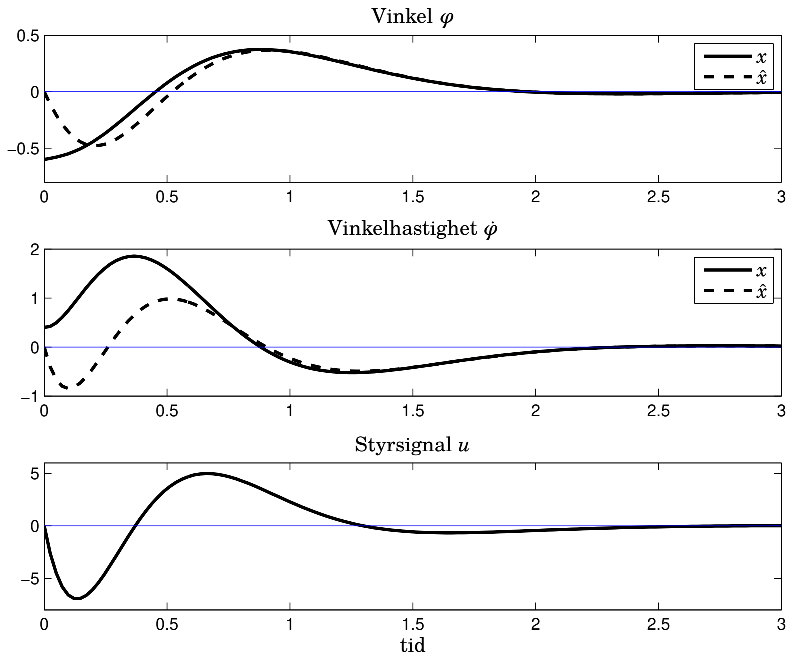
$$(s + 2 - 2i)(s + 2 + 2i) = s^2 + 4s + 8$$

Genom att jämföra de två polynomen får vi följande regulatorparametrar:

$$k_1 = -9 \qquad k_2 = -4$$



Figur 10.2 Tillståndsåterkoppling från verkliga tillstånd i exempel 10.1



Figur 10.3 Tillståndsåterkoppling från de skattade tillstånden i exempel 10.1

I figur 10.2 visas resultatet av ett simuleringsexperiment där vi återkopplar från de verkliga tillstånden med dessa regulatorparametrar. I figuren visas hur regulatorn reser upp pendeln från initialtillståndet $\varphi = -0.6$, $\dot{\varphi} = 0.4$ till det önskade tillståndet $\varphi = \dot{\varphi} = 0$.

Figur 10.3 visar resultatet då vi i stället återkopplar från de skattade tillstånden som vi tog fram via Kalmanfiltrering i exempel 9.2. Figuren visar tydligt hur regleringen blir försämrad i inledningsskedet på grund av att Kalmanfiltret i början har en dålig skattning av tillstånden. □

10.2 Förkortning av poler och nollställen

I samband med tillståndsåterkopplingen och Kalmanfiltreringen har vi diskuterat styrbarhet och observerbarhet. Vi har sett att förlust av styrbarhet och observerbarhet hänger samman med förkortning av poler och nollställen i överföringsfunktionen, så att överföringsfunktionen får en lägre ordning än dimensionen på A-matrisen i tillståndsbeskrivningen.

Vi har tidigare poängterat att styrbarhet och observerbarhet hos själva processen normalt inte är något problem, eftersom man normalt bygger processen på ett sådant sätt att man kan styra och mäta det man vill styra och mäta.

Däremot är insikten om sambandet mellan förkortning av poler och nollställen och förlust av styrbarhet och observerbarhet viktig. Det är nämligen inte ovanligt att man förlorar styrbarhet och observerbarhet genom att via regulatorn förkorta bort dynamik i systemet. Vi ska illustrera problemet genom ett enkelt och mycket vanligt exempel.

Antag att processen som ska regleras beskrivs av den enkla första ordningens modellen

$$G_P(s) = \frac{1}{1+sT}$$

och att regulatorn är en PI-regulator med överföringsfunktionen

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) = K\frac{1+sT_i}{sT_i}$$

där K är regulatorförstärkningen och T_i är regulatorns integraltid. Systemet illustreras i figur 10.4.

Många välkända inställningsmetoder för PI-regulatorer bygger på att man väljer integraltiden lika med processens (långsammaste) tidskonstant, det vill säga

$$T_i = T$$

I figur 10.4 ser vi att detta innebär att nollstället i regulatorn förkortas med processens pol. Systemet kan därför förenklat beskrivas som i figur 10.5, där kretsöverföringsfunktionen blir

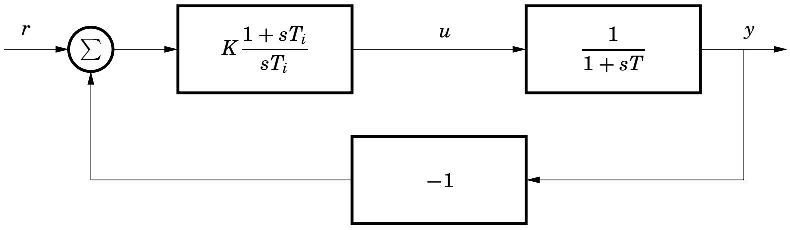
$$G_0(s) = G_R(s)G_P(s) = K\frac{1+sT}{sT} \cdot \frac{1}{1+sT} = \frac{K}{sT}$$

Vi har nu fått en första ordningens kretsöverföringsfunktion. Slutna systemets överföringsfunktion mellan r och y blir

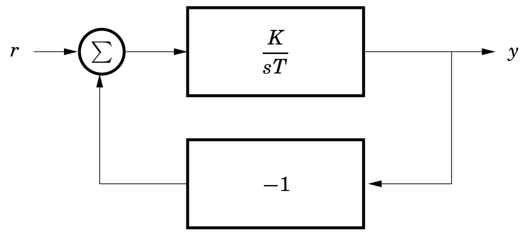
$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{K}{K+sT}$$

Detta första ordningens system kan man nu göra godtyckligt snabbt genom att välja K så att polen

$$s = -\frac{K}{T}$$



Figur 10.4 Den enkla reglerkretsen



Figur 10.5 Den enkla reglerkretsen i figur 10.4 efter förkortning

placeras lämpligt.

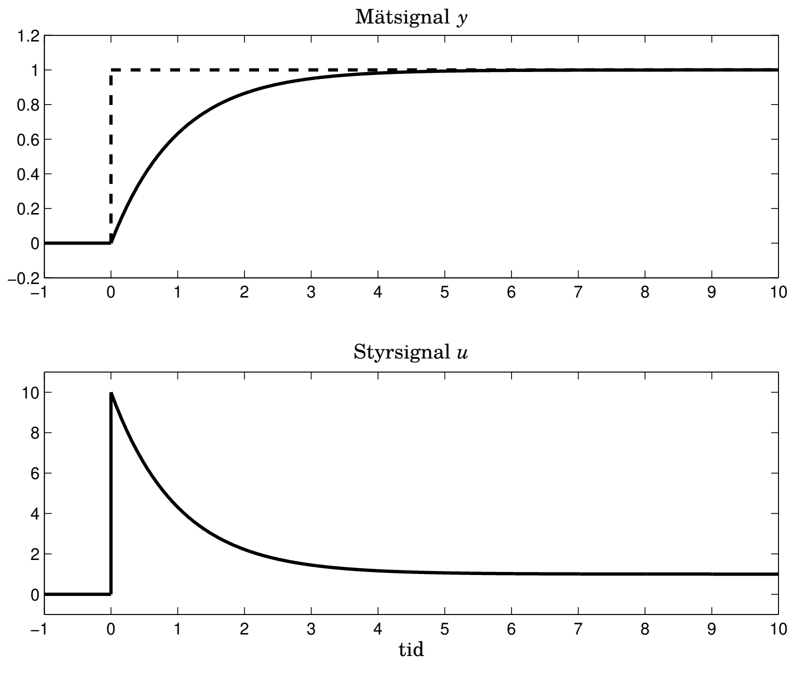
I figur 10.6 visas resultatet av en simulering där processen har tidskonstanten $T = 10$, vilket leder till att $T_i = T = 10$. Regulatorns förstärkning är vald till $K = 10$, vilket innebär att slutna systemet får tidskonstanten $T_s = 1$, det vill säga 10 gånger snabbare än det öppna systemet.

Så långt verkar allt fungera bra, men det faktum att vi förkortat poler och nollställen bör göra oss misstänksamma. Det betyder att här finns tillstånd som inte är styrbara eller observerbara.

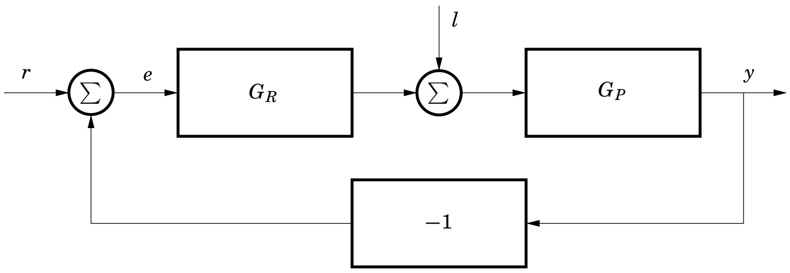
Låt oss nu studera problemet i figur 10.7 där vi även tagit med laststörningar i systemet. Vi har nu två insignaler, referensvärdet r och laststörningen l. Det leder till följande överföringsfunktioner.

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G_P(s)\left(L(s) + G_R(s)(R(s) - Y(s))\right) \\
&= \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} R(s) + \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} L(s) \\
&= \frac{K}{K + sT} R(s) + \frac{sT}{(1 + sT)(K + sT)} L(s)
\end{aligned}
$$

Här ser vi nu att överföringsfunktionen från l till y är av andra ordningen och att den ursprungliga processpolen dyker upp i denna överföringsfunktion. Tillståndet som svarar mot denna långsamma pol hade vi genom förkortningen gjort icke styrbart



Figur 10.6 Svaret på en stegändring i r. Slutna systemets tidskonstant är $T_s = 1$.



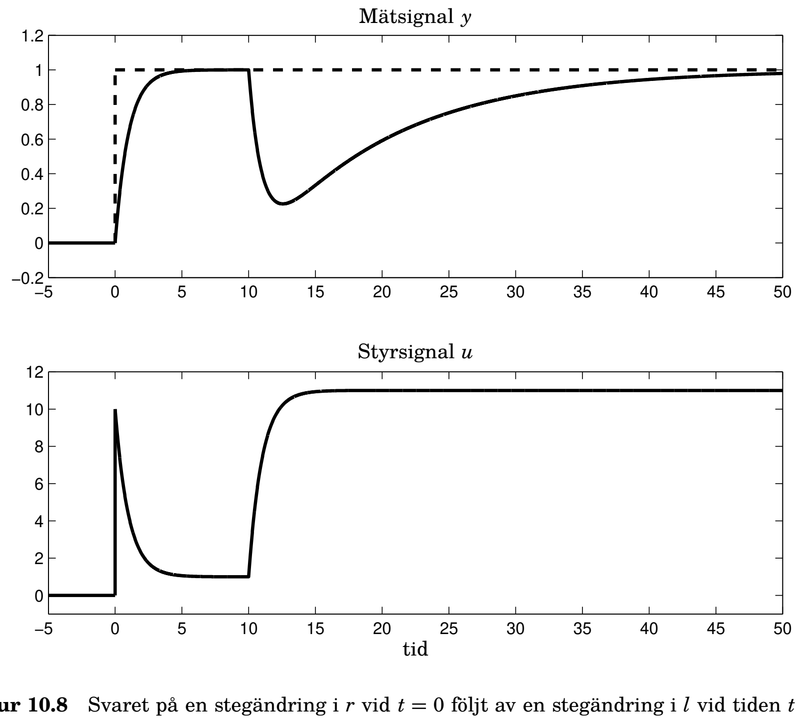
Figur 10.7 Den enkla reglerkretsen med både referensvärde r och laststörning l

från r, vilket alltså innebar att vi inte exciterade det vid ändringar i r. Tillståndet är dock observerbart och kommer att visa sig varje gång lasten ändras.

I figur 10.8 visas resultatet av en stegändring i referensvärdet följt av en stegändring i lasten. Observera att vi här har andra skalor än i figur 10.6. Figuren visar att svaret på laststörningen blir mycket långsamt beroende på att vi här har kvar den öppna polen svarande mot tidskonstanten $T = 10$. Notera att styrsignalen enbart reagerar för den snabba tidskonstanten men ligger konstant under den långsamma insvängningen.

Detta exempel visar att det kan vara farligt att förkorta poler och nollställen. Förkortningen kan leda till enkla beräkningar och bra egenskaper vad gäller variationer i vissa signaler. Eftersom förkortningen innebär att det finns tillstånd som inte är styrbara eller observerbara, kan metoden leda till obehagliga överraskningar vid variationer i andra signaler. Detta gäller framför allt då långsam dynamik förkortas.

Slutsatsen är att det är säkrast att placera samtliga poler i överföringsfunktionen på lämpliga ställen utan att förkorta bort dem mot nollställen.



Figur 10.8 Svaret på en stegändring i r vid $t = 0$ följt av en stegändring i l vid tiden $t = 10$

Föreläsning 11

Kompensering i frekvensplanet

Vi ska nu övergå till att bestämma regulatorer i frekvensplanet med hjälp av Bodediagrammet. Först går vi igenom hur man kan bestämma slutna systemets egenskaper genom att ange specifikationer på det öppna systemets Bodediagram. Därefter går vi igenom två typer av kompenseringslänkar, en som påverkar systemets lågfrekvensegenskaper och stationära fel och en som påverkar systemets snabbhet och robusthet.

11.1 Specifikationer i Bodediagrammet

I figur 11.1 visas blockschemat för en enkel reglerkrets med kretsöverföringsfunktionen G_0. Kretsöverföringsfunktionen består av processen G_P och regulatorn G_R, så att $G_0 = G_R G_P$. Slutna systemets överföringsfunktion ges av

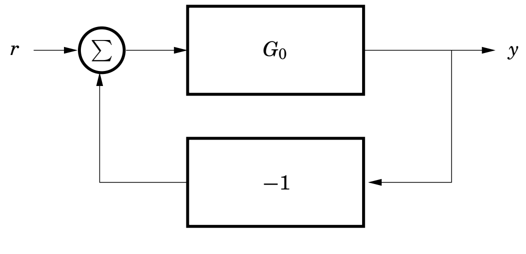
$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

Eftersom man vill att mätsignalen ska följa referensvärdet, det vill säga att $y = r$, är den ideala överföringsfunktionen för det slutna systemet $G(s) = 1$. Detta kan man i praktiken inte uppnå, men genom att ha en hög kretsförstärkning $|G_0(i\omega)|$ för låga frekvenser kan man åstadkomma $G(i\omega) \approx 1$ för låga frekvenser. I figur 11.2 visas ett typiskt Bodediagram för en överföringsfunktion för ett slutet system. $|G(i\omega)| \approx 1$ för låga frekvenser, ökar i ett visst frekvensområde, och avtar därefter snabbt.

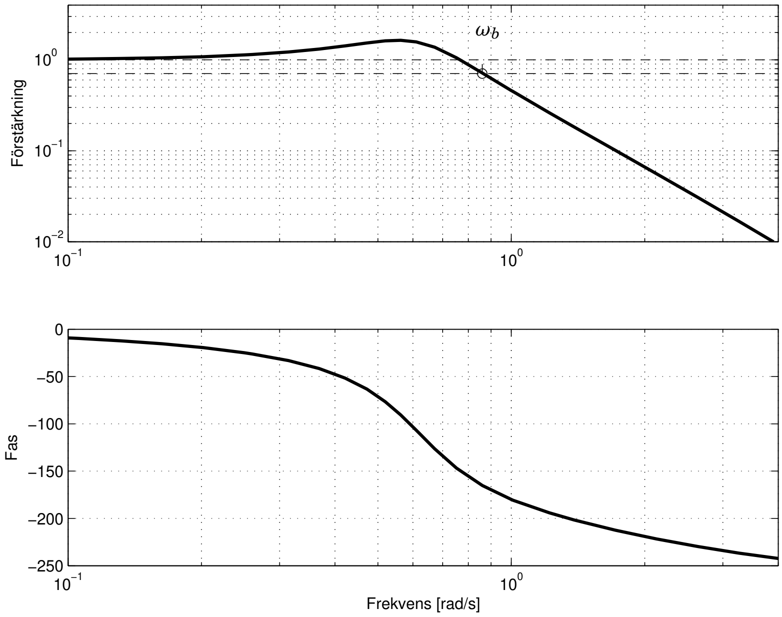
Som mått på slutna systemets snabbhet brukar man använda bandbredden ω_b som definieras som den frekvens där $|G(i\omega_b)| = 1/\sqrt{2}$, se figur 11.2.

I figur 11.3 visas Bodediagrammet för kretsöverföringsfunktionen G_0. Utseendet är typiskt för många kretsöverföringsfunktioner. På grund av integralverkan är förstärkningen hög vid låga frekvenser. Efterhand som frekvensen ökar blir förstärkningen mindre och mindre samtidigt som fasvridningen ökar.

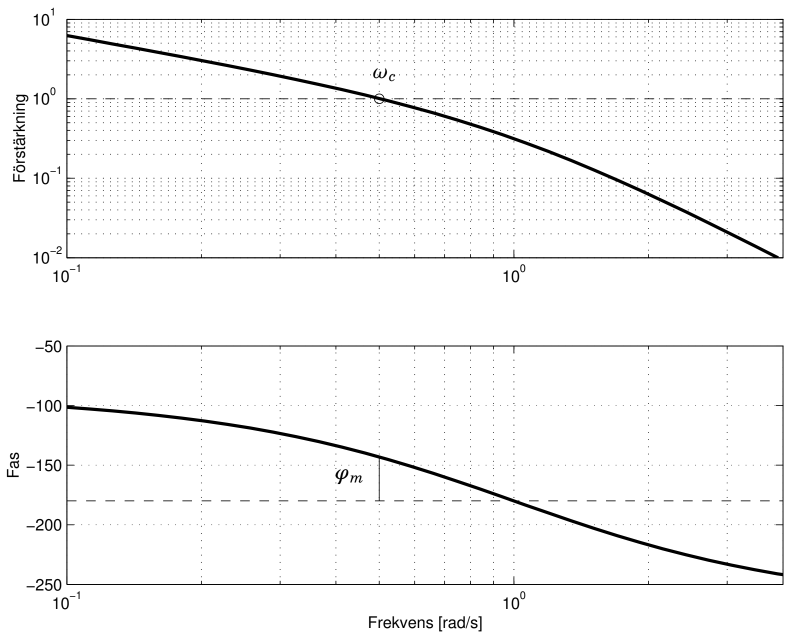
Trots att det är det slutna systemets egenskaper vi är intresserade av kan vi ange specifikationer för det öppna systemet. Det är t.ex. antalet integratorer i G_0



Figur 11.1 Den enkla reglerkretsen med kretsöverföringsfunktionen $G_0(s)$



Figur 11.2 Bodediagram för det slutna systemet där bandbredden ω_b används som mått på systemets snabbhet



Figur 11.3 Bodediagram för det öppna systemet där skärfrekvensen ω_c används som mått på slutna systemets snabbhet och fasmarginalen φ_m som mått på slutna systemets robusthet

som avgör hur snabba referensvärdesändringar man kan följa utan kvarstående stationära reglerfel. Det är också förstärkningen vid låga frekvenser som avgör hur stora de stationära icke-försvinnande reglerfelen blir. Detta gick vi igenom i Föreläsning 7.

Snabbheten hos det slutna systemet är relaterad till hur högt upp i frekvens det öppna systemet har en relativt hög förstärkning. Det finns många tänkbara val av specifikationer för snabbheten. Vi väljer här skärfrekvensen ω_c, det vill säga den frekvens där förstärkningskurvan skär linjen $|G_0(i\omega)| = 1$.

Vi har tidigare definierat flera mått för det öppna systemet som beskriver robustheten hos det slutna systemet, t.ex. förstärkningsmarginalen A_m, fasmarginalen φ_m och den maximala känslighetsfunktionen M_s. Alla dessa mått anger på något sätt Nyquistkurvans avstånd till den kritiska punkten -1. Vi väljer här att använda fasmarginalen som robusthetsmått.

Genom att avläsa lågfrekvensförstärkningen, skärfrekvensen ω_c och fasmarginalen φ_m för det öppna systemet G_0 kan vi se vilka egenskaper det slutna systemet har. Om vi inte är nöjda med dessa egenskaper kan vi modifiera Bodediagrammet genom kompensering.

11.2 Kompensering

I figur 11.4 visas blockschemat för den enkla reglerkretsen, där nu den ursprungliga kretsöverföringsfunktionen $G_0(s)$ kompenserats med en kompenseringslänk $G_K(s)$ så att vi får en ny kretsöverföringsfunktion

$$G_0^{ny}(s) = G_K(s)G_0(s)$$

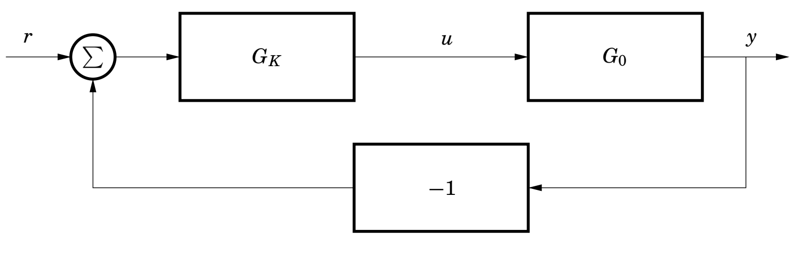
Denna kompenseringslänk kan användas för att få den nya kretsöverföringsfunktionen $G_0^{ny}(s)$ att uppfylla specifikationer på det öppna systemet. Eftersom

$$\log|G_0^{ny}(i\omega)| = \log|G_K(i\omega)| + \log|G_0(i\omega)|$$
$$\arg G_0^{ny}(i\omega) = \arg G_K(i\omega) + \arg G_0(i\omega)$$

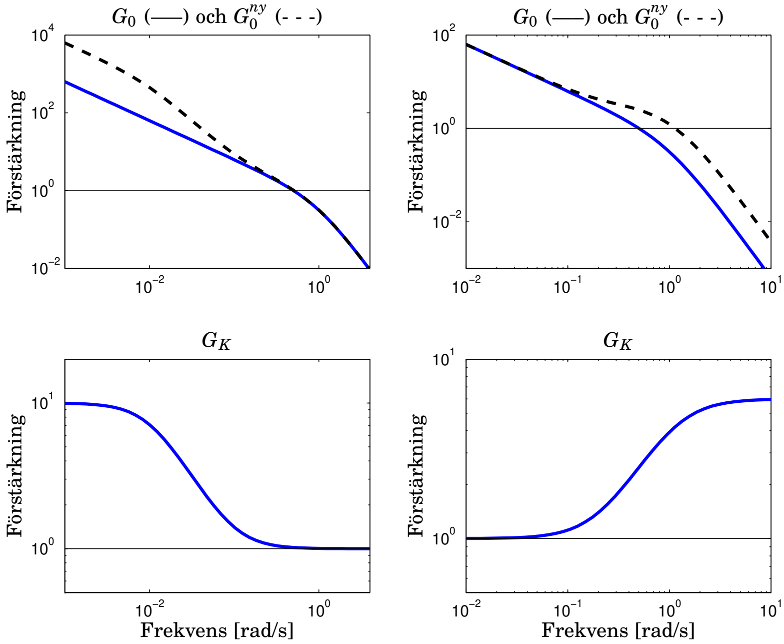
kan vi i Bodediagrammet enkelt bestämma kompenseringslänken $G_K(s)$ som differensen mellan den önskade kretsöverföringsfunktionen $G_0^{ny}(s)$ och den ursprungliga kretsöverföringsfunktionen $G_0(s)$.

I figur 11.5 visas förstärkningskurvor för två exempel på kompensering. De två vänstra kurvorna visar ett fall där den ursprungliga kretsöverföringsfunktionen G_0 har bra högfrekvensegenskaper, men där förstärkningen vid låga frekvenser är för låg. Kompenseringslänken G_K har därför en förstärkning som är hög för låga frekvenser, men ett för höga. De två högra figurerna visar ett fall där den ursprungliga kretsöverföringsfunktionen G_0 har bra lågfrekvensegenskaper, men där man vill göra det slutna systemet snabbare genom att öka skärfrekvensen. Kompenseringslänken G_K har därför en förstärkning som är ett för låga frekvenser, men högre för högre frekvenser.

Vi har nu sett hur man enkelt kan få fram Bodediagrammet för kompenseringslänken genom att bilda differensen mellan den önskade och den ursprungliga kretsöverföringsfunktionen. För att kunna implementera kompenseringslänken måste den dock parametriseras, det vill säga man måste hitta en överföringsfunktion som svarar mot Bodediagrammet för kompenseringslänken. I de kommande avsnitten ska vi visa exempel på hur man kan göra detta.



Figur 11.4 Den enkla reglerkretsen med en kompenseringslänk $G_K(s)$



Figur 11.5 Två exempel på kompensering. De vänstra figurerna visar kompensering som höjer lågfrekvensförstärkningen. De högra figurerna visar kompensering som höjer högfrekvensförstärkningen och därmed ökar skärfrekvensen. Kompenseringslänken G_K ges av differensen mellan G_0^{ny} och G_0

11.3 Fasretarderande kompensering

Vi börjar med att studera Bodediagrammet för en kompenseringslänk med överföringsfunktionen

$$G_K(s) = \frac{s+a}{s+a/M} = M\frac{1+s/a}{1+sM/a} \qquad M > 1$$

Bodediagrammet för G_K visas i figur 11.6. Förstärkningskurvan har lågfrekvensasymptoten $G_K(0) = M$ och högfrekvensasymptoten $G_K(s) \to 1,\ s \to \infty$. Kompenseringslänken har en pol som gör att Bodediagrammet bryter ner vid frekvensen $\omega = a/M$ och ett nollställe som gör att Bodediagrammet bryter upp igen vid $\omega = a$.

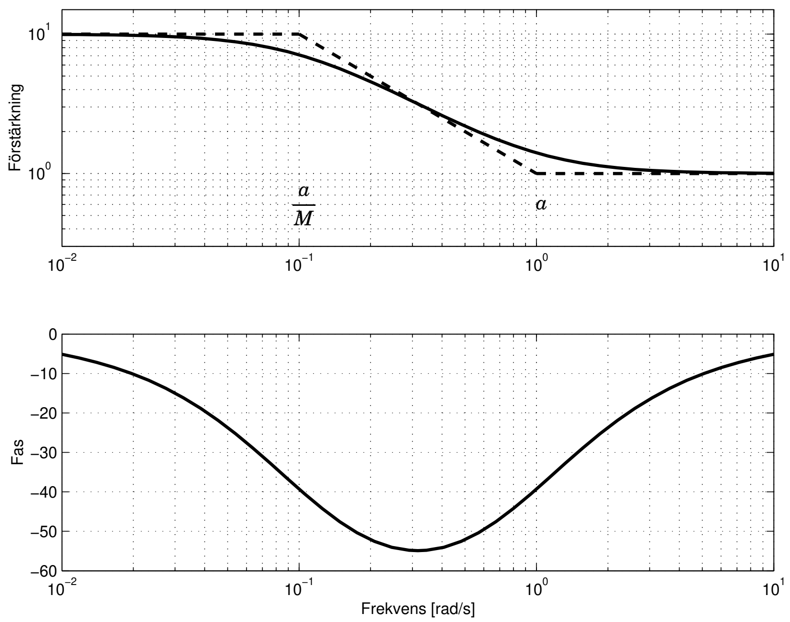
Den fasretarderande länken har samma utseende som den vänstra kompenseringslänken i figur 11.5. Den har egenskapen att den höjer förstärkningen vid låga frekvenser och används därför för att minska stationära fel. Sitt namn har den fått för att den minskar fasen. Detta är naturligtvis en negativ egenskap.

Den fasretarderande länken har två parametrar som ska bestämmas, lågfrekvensförstärkningen M och brytfrekvensen a. Parametrarna bestäms på följande sätt:

M : Förstärkningen M ges av specifikationerna på hur mycket vi vill minska det stationära felet. Om den ursprungliga kretsöverföringsfunktionen G_0 innehåller minst en integrator kan man visa att det stationära felet minskar precis en faktor M.

a : Brytfrekvensen a bestämmer vid vilken frekvens förstärkningen i kompenseringslänken ska brytas ner från M till ett. En vanlig metod är att välja a så att den negativa fasvridningen inte påverkar fasmarginalen alltför mycket. Tumregeln

$$a = 0.1\omega_c$$



Figur 11.6 Bodediagrammet för den fasretarderande länken. I exemplet är $M = 10$ och $a = 1$.

garanterar att fasmarginalen minskar högst 6°, under förutsättning att ω_c inte ändras. Detta kan man se genom att studera argumentet för $G_K(i\omega_c)$:

$$\begin{aligned} \arg G_K(i\omega_c) &= \arctan\frac{\omega_c}{a} - \arctan\frac{M\omega_c}{a} = \arctan 10 - \arctan 10M \\ &> \arctan 10 - 90^\circ > -6^\circ \end{aligned}$$

Specialfall Låt oss undersöka vad som händer då $M \to \infty$. Då blir kompenseringslänken

$$G_K(s) = \frac{s+a}{s+a/M} \to \frac{s+a}{s} = 1 + \frac{a}{s}, \qquad M \to \infty$$

Detta är ekvationen för en PI-regulator. Att välja $M \to \infty$ är detsamma som att kräva att det kvarstående reglerfelet ska elimineras. Detta kräver ju att ytterligare en integrator införs i reglerkretsen.

I många sammanhang kan man välja att införa så många integratorer att de intressanta stationära felen försvinner i stället för att bestämma ett ändligt värde på förstärkningen M i ett fasretarderande filter.

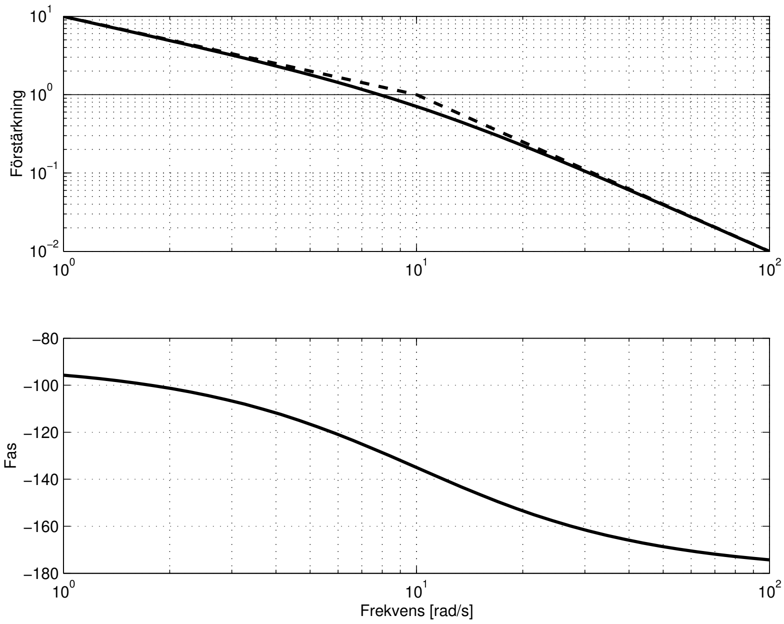
Exempel 11.1—Minskning av stationärt fel

En elektrisk motor kan beskrivas med överföringsfunktionen

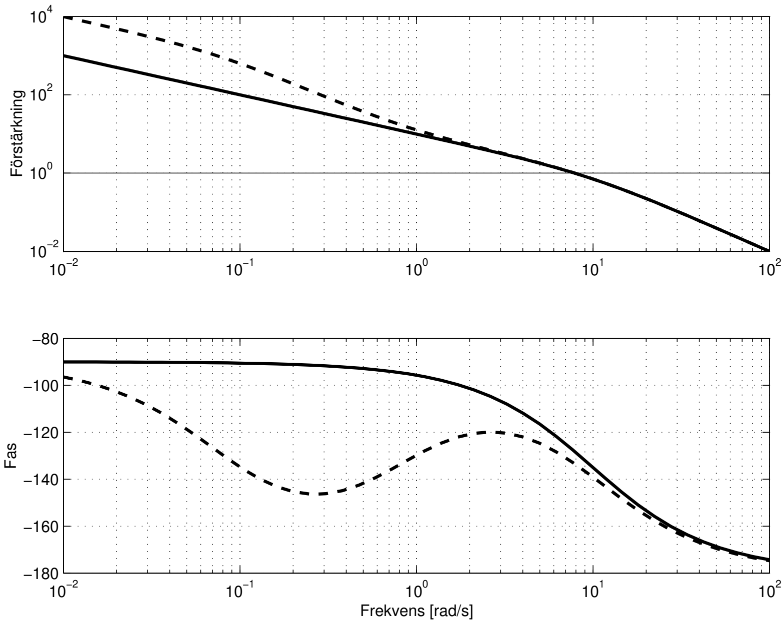
$$G_P(s) = \frac{100}{s(s+10)}$$

mellan motorns insignal som är strömmen in till motorn, och motorns utsignal som är motorns vinkel φ. Ursprungligen är motorn återkopplad enkelt som i figur 11.1, det vill säga $G_0 = G_P$. Detta ger en snabbhet (skärfrekvens) och en robusthet (fasmarginal) som är tillfredsställande. Eftersom G_0 innehåller en integrator kan man följa stegändringar i referensvärdet utan kvarstående reglerfel. Vid rampändringar i referensvärdet får man dock ett kvarstående reglerfel som man vill minska en faktor 10.

Bodediagrammet för motorn visas i figur 11.7. Bodediagrammet har lutningen −1 för låga frekvenser och fasvridningen −90°. Vid brytfrekvensen $\omega = 10$ bryter förstärkningskurvan ner så att lutningen blir −2 och fasvridningen går mot −180°. Vi kan också se att skärfrekvensen är $\omega_c \approx 8$ och att fasmarginalen är $\varphi_m \approx 50°$.



Figur 11.7 Bodediagrammet för motorn i exempel 11.1



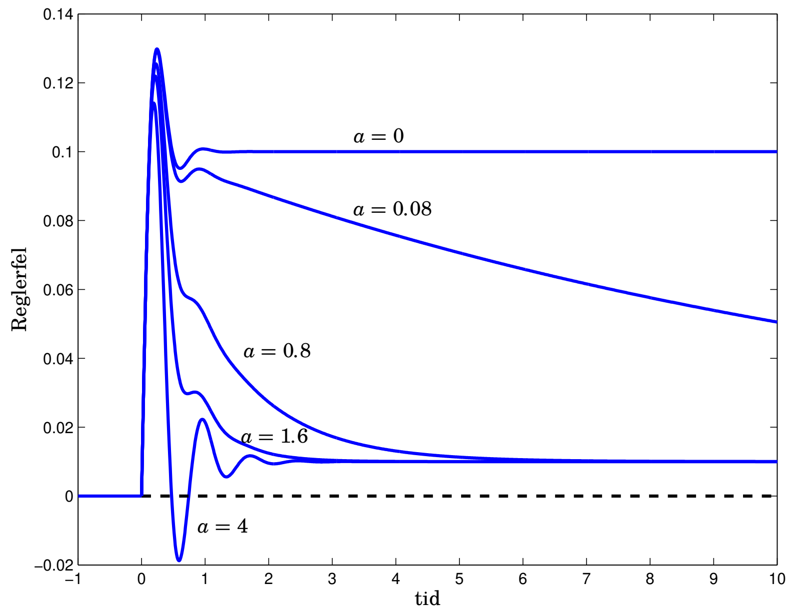
Figur 11.8 Bodediagrammen för G_0 (——) och G_0^{ny} (- - -) i exempel 11.1

Eftersom vi vill minska det stationära felet en faktor 10 och $G_0(s)$ innehåller en integrator väljer vi $M = 10$. För att undvika att fasmarginalen ändras alltför mycket väljer vi brytfrekvensen $a = 0.1\omega_c = 0.8$. Det ger oss kompenseringslänken

$$G_K(s) = \frac{s+a}{s+a/M} = \frac{s+0.8}{s+0.08}$$

I figur 11.8 visas Bodediagrammet för det kompenserade systemet G_0^{ny}. Lågfrekvensförstärkningen har ökat en faktor 10 som vi ville, samtidigt som vi inte nämnvärt ändrat egenskaperna vid och över skärfrekvensen.

I figur 11.9 visas slutligen svaren på rampändringar i systemet. För tydlighets skull visas reglerfelet i stället för själva svaret. Figuren visar reglerfelen för några



Figur 11.9 Reglerfelet vid rampändring i referensvärdet för olika val av a i exempel 11.1

olika val av brytfrekvensen a. Fallet $a = 0$ svarar mot fallet $G_K = 1$, det vill säga regleringen utan någon kompensering. I figuren framgår det tydligt att valet av a är en kompromiss mellan prestanda och robusthet. Om a väljs liten får vi ett robust men långsamt svar, medan ett stort värde på a ger en snabb insvängning mot det stationära värdet, men med kraftiga överslängar. I det senare fallet har fasmarginalen minskat väsentligt. Figuren visar att valet $a = 0.1\omega_c = 0.8$ är rimligt, eventuellt lite konservativt. □

11.4 Fasavancerande kompensering

Vi övergår nu till att studera Bodediagrammet för en annan kompenseringslänk med överföringsfunktionen

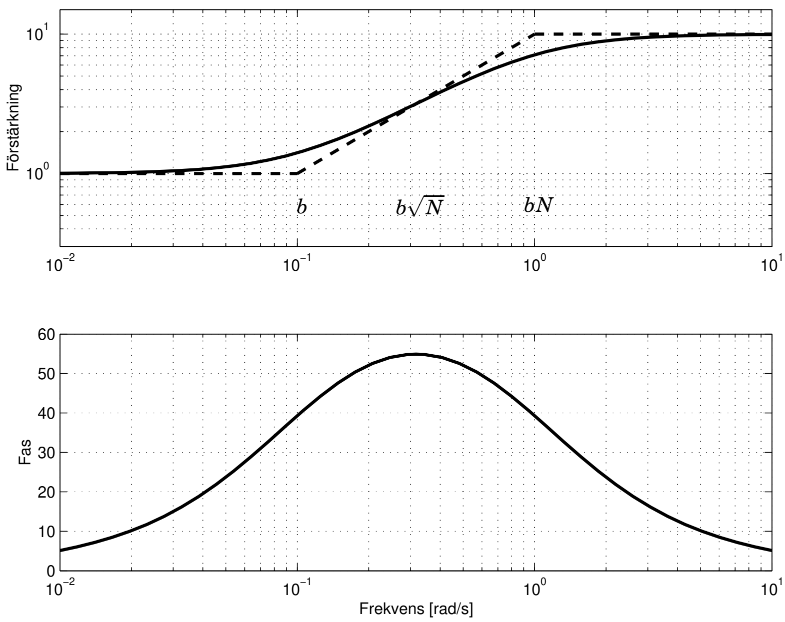
$$G_K(s) = K_K N \frac{s+b}{s+bN} = K_K \frac{1+s/b}{1+s/(bN)} \qquad N > 1$$

Bodediagrammet för $G_K(s)$ visas i figur 11.10. Lågfrekvensasymptoten är $G_K(0) = K_K$ och högfrekvensasymptoten $G_K(s) \to K_K N,\ s \to \infty$. Det finns ett nollställe som gör att Bodediagrammet bryter upp vid frekvensen $\omega = b$ och en pol som gör att Bodediagrammet bryter ner igen vid $\omega = bN$.

Den fasavancerande länken har samma utseende som den högra kompenseringslänken i figur 11.5. Den har egenskapen att den kan höja förstärkningen vid höga frekvenser samtidigt som den ökar fasvridningen. Det innebär att denna länk kan användas både för att öka snabbheten (skärfrekvensen) och robustheten (fasmarginalen).

Den fasavancerande länken har tre parametrar som ska bestämmas, K_K, N och b. För den fasretarderande länken valde vi parametrar så att den negativa fasvridningen inte skulle påverka fasmarginalen. Nu gör vi tvärt om och ser till att toppen på den positiva faskurvan hamnar precis vid skärfrekvensen.

Kompenseringslänken G_K har sin topp i faskurvan vid frekvensen som ges av det geometriska medelvärdet av brytfrekvenserna b och bN, det vill säga vid $\omega = b\sqrt{N}$.



Figur 11.10 Bodediagrammet för den fasavancerande länken. I exemplet är $K_K = 1$, $N = 10$ och $b = 0.1$.

Vid denna frekvens gäller att

$$|G_K(ib\sqrt{N})| = K_K\sqrt{N}$$
$$\arg G_K(ib\sqrt{N}) = \arctan(\sqrt{N}) - \arctan(1/\sqrt{N})$$

Parametrarna i kompenseringslänken bestäms i följande fyra steg:

1. Första steget är att man specificerar den önskade skärfrekvensen ω_c och den önskade fasmarginalen φ_m.

2. Parametern N bestämmer hur stor toppen på kompenseringslänkens faskurva är. Ju större N är desto större blir fasökningen. I figur 11.11 visas sambandet mellan N och fasökningen $\Delta\varphi$. Den fasökning som behövs vid den önskade skärfrekvensen ω_c är

$$\Delta\varphi = \varphi_m - (180^\circ + \arg G_0(i\omega_c))$$

3. Nästa steg är att se till att faskurvans topp verkligen hamnar vid ω_c. Eftersom faskurvans topp ligger vid frekvensen $b\sqrt{N}$, innebär det att vi ska välja b så att

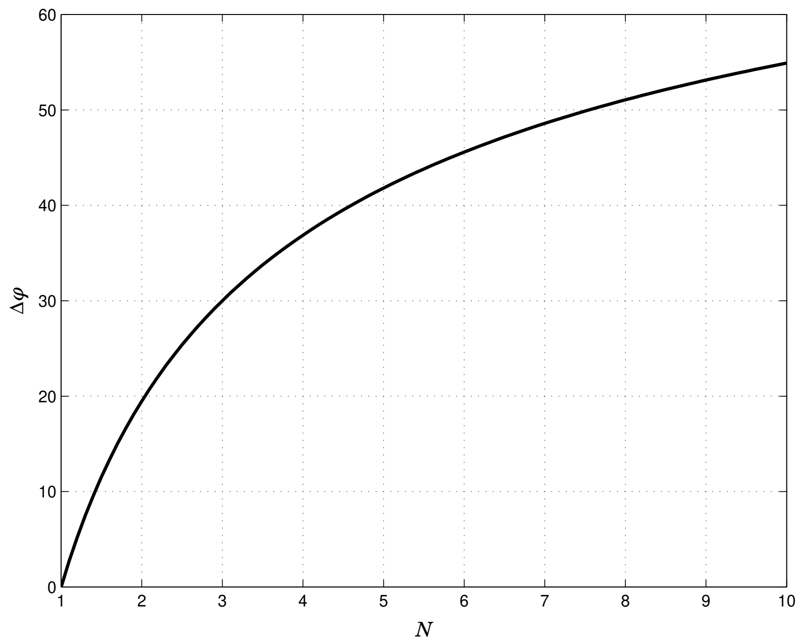
$$b\sqrt{N} = \omega_c$$

4. Det sista steget är att bestämma parametern K_K så att frekvensen ω_c verkligen blir skärfrekvensen, det vill säga så att

$$|G_K(i\omega_c)| \cdot |G_0(i\omega_c)| = 1$$

Här kan det vara bra att veta att

$$|G_K(i\omega_c)| = |G_K(ib\sqrt{N})| = K_K\sqrt{N}$$



Figur 11.11 Sambandet mellan parametern N och den önskade fasökningen $\Delta\varphi$ i den fasavancerande kompenseringslänken.

Specialfall Låt oss undersöka vad som händer då $N \to \infty$. Då blir kompenseringslänken

$$G_K(s) = K_K \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)} \to K_K(1 + \frac{s}{b}), \qquad N \to \infty$$

Detta är ekvationen för en PD-regulator.

EXEMPEL 11.2—ÖKAD SNABBHET MED BIBEHÅLLEN ROBUSTHET
Vi betraktar samma motor som i föregående exempel med överföringsfunktionen

$$G_P(s) = \frac{100}{s(s+10)}$$

Ursprungligen är motorn återkopplad enkelt som i figur 11.1, det vill säga $G_0 = G_P$. Denna gången ska vi inte påverka de stationära egenskaperna, utan i stället göra motorn dubbelt så snabb med bibehållna robusthetsegenskaper. Målet är med andra ord att fördubbla skärfrekvensen med bibehållen fasmarginal.

I figur 11.7 ser vi att den ursprungliga skärfrekvensen är 8 och den ursprungliga fasmarginalen 50°. Vi bestämmer nu parametrarna i den fasavancerande kompenseringslänken enligt de fyra stegen ovan.

1. Eftersom specifikationen var att fördubbla skärfrekvensen med bibehållen fasmarginal får vi $\omega_c = 2 \cdot 8 = 16$ och $\varphi_m = 50°$.

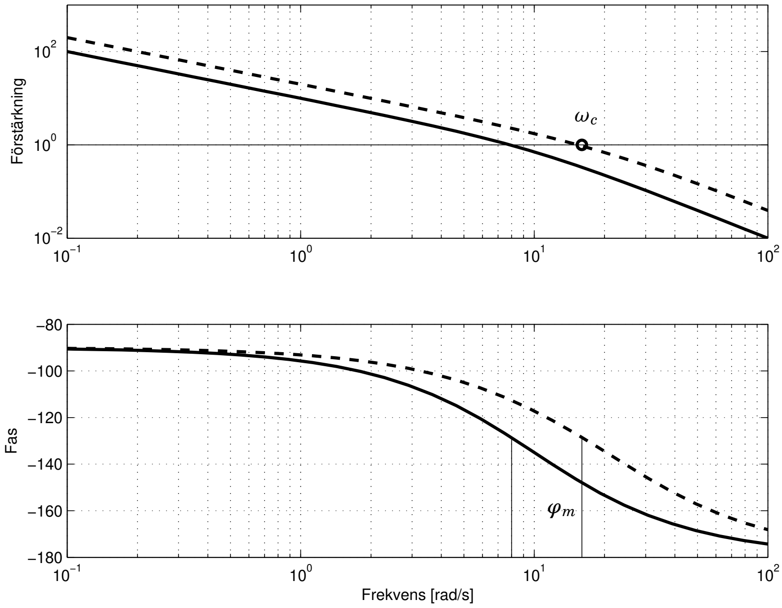
2. Vid frekvensen $\omega_c = 16$ ser vi i Bodediagrammet att processen har argumentet $\arg G_0(i \cdot 16) \approx -150°$. Det betyder att vi behöver en fasökning på $\Delta\varphi = \varphi_m - (180° - 150°) = 20°$. I figur 11.11 ser vi att detta ger $N = 2$.

3. Nästa steg är att välja b så att fastoppen hamnar vid ω_c. Ur ekvationen $b\sqrt{N} = \omega_c = 16$ får vi $b = 16/\sqrt{2} \approx 11$.

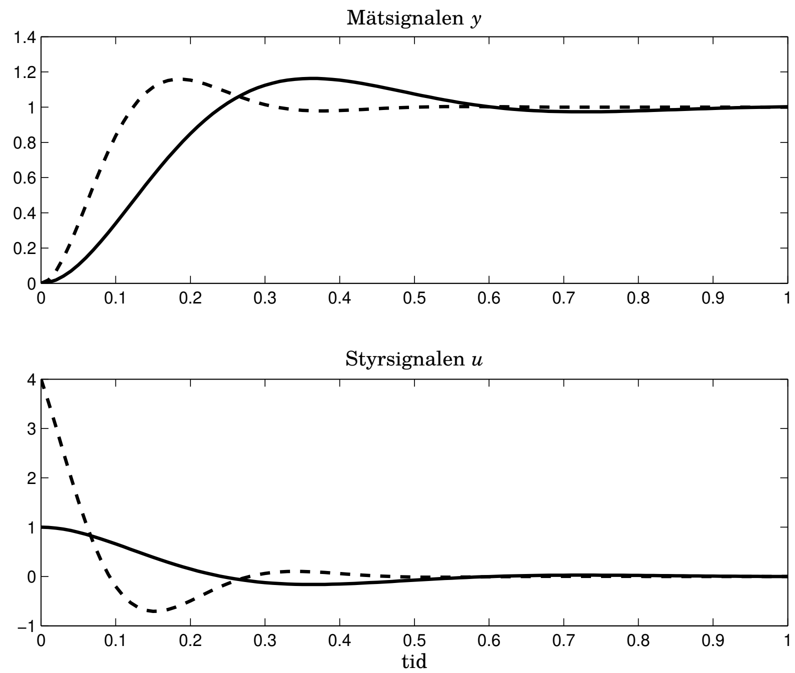
4. Slutligen bestämmer vi K_K så att $\omega_c = 16$ verkligen blir skärfrekvensen. I Bodediagrammet ser vi att $|G_0(i\omega_c)| \approx 0.35$. Eftersom

$$|G_K(i\omega_c)| \cdot |G_0(i\omega_c)| \approx K_K\sqrt{N} \cdot 0.35 = 1$$

får vi $K_K \approx 2$



Figur 11.12 Bodediagrammen för G_0 (——) och G_0^{ny} (- - -) i exempel 11.2



Figur 11.13 Svaret på en stegändring i referensvärdet för det okompenserade systemet (——) och för det kompenserade systemet (- - -) i exempel 11.2

Den fasavancerande kompenseringslänken blir därför

$$G_K(s) = K_K N \frac{s+b}{s+bN} = 4\frac{s+11}{s+22}$$

I figur 11.12 visas Bodediagrammet för det kompenserade systemet G_0^{ny}. Skärfrekvensen har flyttats till $\omega_c = 16$ med bibehållen fasmarginal, som vi ville. I figur 11.13 visas slutligen svaren på stegändringar i referensvärdet. Figuren visar att vi lyckats göra systemet dubbelt så snabbt utan att överslängen blivit större. □

Föreläsning 12

PID-reglering

I denna föreläsning ska vi först undersöka PID-regulatorns Bodediagram och från det dra slutsatser om PID-regulatorns funktion och inställning. Därefter går vi igenom några enkla tumregler för att ställa in PID-regulatorer. I den andra delen av föreläsningen diskuteras först börvärdeshantering och nollställen. Därefter går vi igenom några tillägg till PID-regulatorn som behöver göras för att få den praktiskt användbar.

12.1 PID-regulatorns Bodediagram

I föregående föreläsning såg vi att man kan använda öppna systemets Bodediagram för att bestämma kompenseringslänkar som ger slutna systemet önskade egenskaper. Vi ska använda samma metodik för att undersöka PID-regulatorns funktion och parametrarnas betydelse. För att göra det ska vi rita Bodediagrammet för PID-regulatorn. För enkelhets skull väljer vi att rita Bodediagrammet för en speciell parametrisering av PID-regulatorn, nämligen serieformen.

Serieformen av PID-regulatorn

Hittills har vi antagit att PID-regulatorn beskrivs av ekvationen

$$u = K\left(e + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{de}{dt}\right)$$

med överföringsfunktionen

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)$$

Denna form kallas parallellformen, eftersom reglerfelet e behandlas parallellt i P, I och D-delen. En lika vanlig form i industriella produkter har i stället överföringsfunktionen

$$G'_R(s) = K'\left(1 + \frac{1}{sT'_i}\right)(1 + sT'_d)$$

Denna form kallas för serieformen, eftersom den kan beskrivas som en seriekoppling av en PI- och en PD-regulator. Det är inte så stor skillnad mellan dessa två former som man skulle kunna tro. Om vi multiplicerar ihop faktorerna i serieformen

$$G'_R(s) = K'\left(1 + \frac{1}{sT'_i}\right)(1 + sT'_d) = K'\left(1 + \frac{T'_d}{T'_i} + \frac{1}{sT'_i} + sT'_d\right)$$

ser vi att regulatorn fortfarande består av en P-del, en I-del och en D-del. Den enda skillnaden mellan de två formerna är att parametrarna betyder olika saker.

Sambanden ges av följande ekvationer:

$$K = K' \frac{T_i' + T_d'}{T_i'} \qquad K' = \frac{K}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}}\right)$$

$$T_i = T_i' + T_d' \qquad T_i' = \frac{T_i}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}}\right)$$

$$T_d = \frac{T_i' T_d'}{T_i' + T_d'} \qquad T_d' = \frac{T_i}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}}\right)$$

Om man samtidigt som man byter regulator från en form till en annan översätter regulatorparametrarna på detta sätt blir funktionerna hos regulatorerna identiska.

Man kan göra två intressanta iakttagelser vad gäller strukturerna. Den första är att de två representationerna är identiska då regulatorerna används som P-, PI- eller PD-regulatorer. Det är bara då alla tre termerna används som det är skillnad mellan parametrarna i serie- och parallellformen.

Den andra iakttagelsen är att parallellformen är mer generell än serieformen. Vi kan alltid översätta en regulator på serieform till parallellform, men vi kan endast gå från parallellformen till serieformen då

$$T_i \geq 4T_d$$

Vi kan se detta om vi jämför överföringsfunktionerna. PID-regulatorn har en pol i origo och två nollställen. I parallellformen kan de två nollställena vara komplexa, medan serieformen enbart tillåter reella nollställen.

När PID-regulatorerna byggdes med pneumatisk teknik på 30- och 40-talet blev de av praktiska skäl gjorda på serieformen. Anledningen till att det fortfarande finns så många regulatorer på serieformen är att regulatortillverkare velat behålla funktionen hos regulatorerna efterhand som man under åren bytt teknik.

PID-regulatorns Bodediagram

Vi ska nu studera Bodediagrammet för PID-regulatorn och väljer att göra det för serieformen. Dels är denna form lättare att rita eftersom den enbart har reella nollställen, dels är tolkningen av regulatorparametrarna tydligare för serieformen. De slutsatser vi drar kommer dock även att gälla för parallellformen.

Överföringsfunktionen för G_R' kan skrivas om på följande sätt:

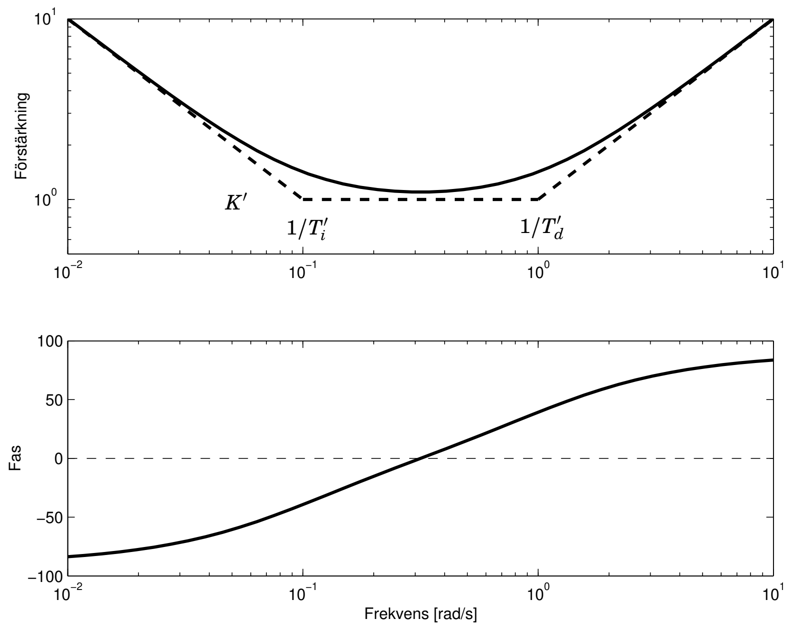
$$G_R'(s) = K'\left(1 + \frac{1}{sT_i'}\right)(1 + sT_d') = \frac{K'}{sT_i'}(1 + sT_i')(1 + sT_d')$$

Bodediagrammets lågfrekvensasymptot är $K'/(sT_i')$ och dess högfrekvensasymptot är $K'T_d's$. Det finns två brytpunkter i Bodediagrammet. Om vi förutsätter att $T_i' > T_d'$ så kommer den första brytpunkten vid $\omega = 1/T_i'$ och den andra vid $\omega = 1/T_d'$. Båda brytpunkterna kommer från nollställen, varför Bodediagrammet bryter upp vid dem.

Bodediagrammet för PID-regulatorn visas i figur 12.1. I Bodediagrammet ser man tydligt vilka funktioner de tre parametrarna har. Förstärkningen K' bestämmer nivån på förstärkningskurvan och integral- och derivatatiderna T_i' och T_d' bestämmer de två brytpunkterna. Vi ska utnyttja Bodediagrammet för att undersöka PID-parametrarnas betydelse för slutna systemets egenskaper närmare.

PID-regulatorns parametrar

I figur 12.2 visas hur Bodediagrammet förändras då de tre regulatorparametrarna varierar. Vi ska nu undersöka hur dessa variationer påverkar slutna systemets



Figur 12.1 Bodediagrammet för PID-regulatorn. Parametrarna är $K' = 1$, $T_i' = 10$ och $T_d' = 1$.

egenskaper. När vi gör detta förutsätter vi att vi har en någorlunda väl inställd regulator. Detta innebär bland annat att skärfrekvensen ω_c ligger i närheten av de båda brytfrekvenserna i regulatorn, det vill säga i närheten av $1/T_i'$ och $1/T_d'$. Vi antar dessutom att kretsöverföringsfunktionen har det typiska utseendet som visas i figur 11.3, med avtagande förstärkning och fas, och att detta utseende även gäller efter parametervariationerna.

K' ökar: En ökning av förstärkningen K' innebär att förstärkningskurvan höjs för alla frekvenser medan faskurvan förblir oförändrad. Den ökade förstärkningen vid låga frekvenser innebär att eventuella stationära fel minskar.

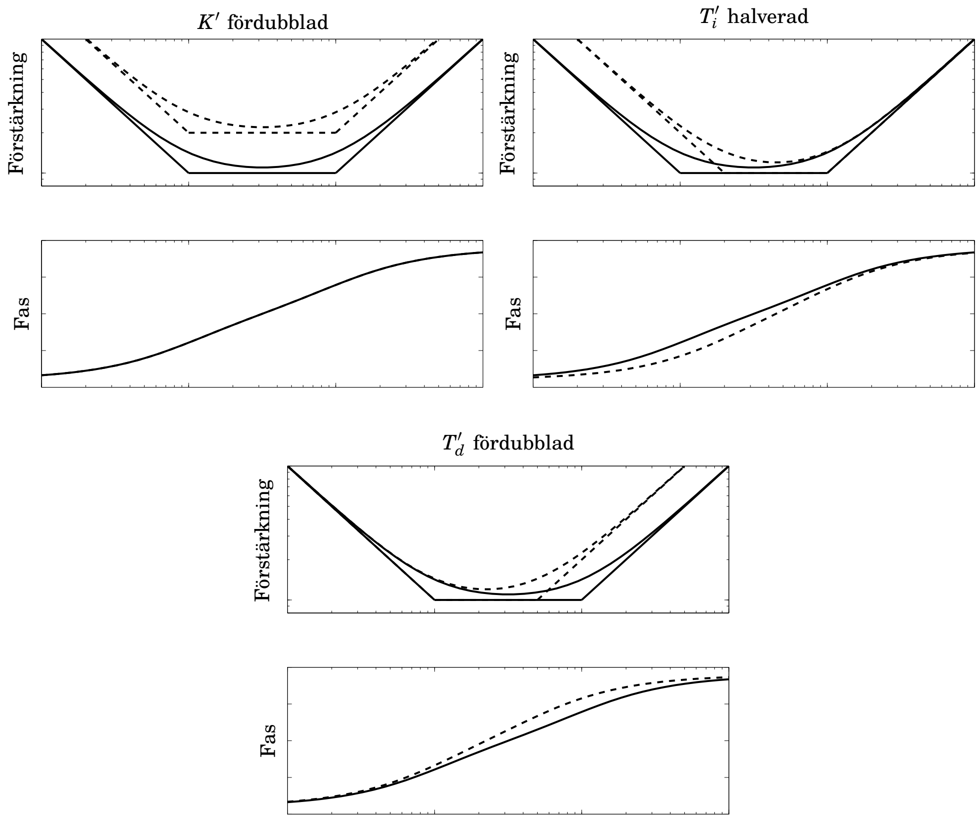
Höjningen av förstärkningen kommer att öka skärfrekvensen ω_c hos det kompenserade systemet. Den ökade skärfrekvensen medför att snabbheten hos det slutna systemet ökar. Eftersom nu fasmarginalen ska avläsas vid en högre frekvens kommer förstärkningsökningen också att innebära att fasmarginalen minskar och robustheten blir sämre.

T_i' minskar: En minskning av T_i' innebär en ökning av integralverkan, eftersom T_i' finns i nämnaren i I-delen. En minskning av T_i' medför att förstärkningen ökar för låga frekvenser, samtidigt som fasen minskar. Den ökade förstärkningen vid låga frekvenser innebär att eventuella stationära fel minskar.

Den ökade förstärkningen medför att snabbheten hos det slutna systemet ökar. Eftersom fasmarginalen nu ska avläsas vid en högre frekvens, samtidigt som fasen minskat, blir robustheten hos det slutna systemet sämre.

T_d' ökar: En ökning av T_d' innebär att förstärkningen ökar för höga frekvenser, samtidigt som fasen ökar. Höjningen av förstärkningen innebär att skärfrekvensen ω_c ökar.

Den höjda skärfrekvensen innebär att systemet blir snabbare. Det faktum att fasmarginalen nu ska avläsas vid en högre frekvens ger en sämre robusthet, men eftersom vi samtidigt har höjt fasen kan vi inte dra denna slutsats. Det finns faktiskt en möjlighet att man kan uppnå både en ökning av snabbheten och en förbättrad robusthet genom att höja T_d'. Detta gäller dock bara inom vissa gränser. Därefter ger en höjning av T_d' försämrad robusthet.



Figur 12.2 Bodediagram för PID-regulatorn. De streckade kurvorna visar hur Bodediagrammen förändras då de tre parametrarna K', T_i' och T_d' varierar.

12.2 Enkla inställningsmetoder

PID-regulatorn är en enkel regulator som ofta används vid relativt enkla applikationer där man inte har tid eller kunskap att göra någon djupare analys av reglerproblemet. Därför finns det ett behov av enkla tumregler som ur enkla experiment på processen ger regulatorparametrar som ger en acceptabel reglering.

Det har föreslagits många metoder för att ställa in PID-regulatorer genom åren. De i särklass mest kända metoderna är Ziegler-Nichols metoder. De presenterades i början på 40-talet. De är inte de bästa metoderna, men bland de enklaste. Det är värt att betona att dessa metoder endast ska ses som tumregler som gör att man får rätt storleksordning på regulatorparametrarna. Har man högre krav på prestanda krävs mer avancerade metoder.

Den minsta information som behövs om processen som ska regleras är en processförstärkning för att bestämma regulatorförstärkningen K och en processtid för att bestämma regulatortiderna T_i och T_d. Ziegler och Nichols presenterade två metoder för att ta reda på dessa parametrar, en stegsvarsmetod och en frekvensmetod.

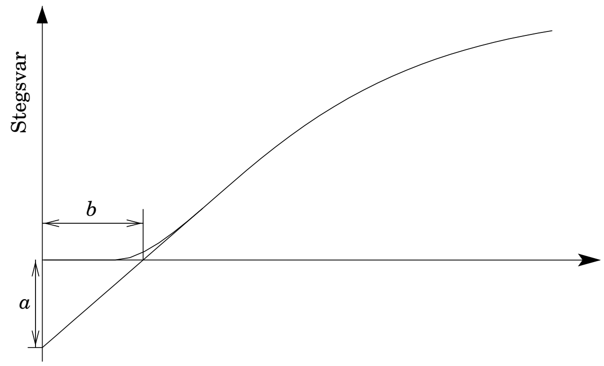
Den metod som används mest i industrin idag är Lambdametoden. Den togs fram på sextiotalet och ger en acceptabel reglering för en stor klass av processer.

Ziegler-Nichols stegsvarsmetod

Ziegler-Nichols stegsvarsmetod bygger på att man har processen i manuell reglering, det vill säga man påverkar styrsignalen u manuellt. Ingen regulator är inkopplad.

När processen är i balans gör man en stegändring i styrsignalen. Vi antar här att steget har storleken 1. Har det inte det måste man normera svaret i mätsignalen med styrsignaländringens belopp.

I figur 12.3 visas ett stegsvar. En tangent dras genom den punkt där stegsvaret har maximal lutning. Ur tangentens skärning med koordinataxlarna avläses sedan



Figur 12.3 Avläsning av förstärkningen a och tiden b ur processens stegsvar.

Regulator	K	T_i	T_d
P	$1/a$		
PI	$0.9/a$	$3b$	
PID	$1.2/a$	$2b$	$0.5b$

Tabell 12.1 Rekommenderade regulatorinställningar enligt Ziegler-Nichols stegsvarsmetod.

förstärkningen a och tiden b. Ziegler och Nichols föreslog att PID-parametrarna därefter skulle beräknas med hjälp av tabell 12.1.

I tabellen ser vi att regulatorförstärkningen K ska väljas omvänt proportionellt mot processförstärkningen a, och att regulatortiderna T_i och T_d ska väljas proportionella mot processtiden b.

Ziegler-Nichols frekvensmetod

Ziegler och Nichols frekvensmetod bygger på att man kopplar in en P-regulator i reglerkretsen och därefter går igenom följande steg:

1. Justera K successivt tills systemet självsvänger med konstant amplitud. Den förstärkning som ger en självsvängande krets betecknas K_0.
2. Mät periodtiden T_0 hos självsvängningen.
3. Välj regulatorparametrar ur tabell 12.2.

I Ziegler-Nichols frekvensmetod identifieras punkten $G_P(i\omega_0)$, dvs den punkt där processen har fasvridningen $-180°$. Om man kopplar in en P-regulator och successivt ökar förstärkningen kommer man efter ett tag till förstärkningen K_0 då $|K_0 G_P(i\omega_0)| = 1$, det vill säga den kritiska punkten då reglerkretsen är på stabilitetsgränsen. Ur förstärkningen K_0 kan man därför baklänges räkna ut $G_P(i\omega_0)$ och frekvensen ω_0 ges av periodtiden T_0, $\omega_0 = 2\pi/T_0$.

När vi nu insett hur Ziegler-Nichols frekvensmetod fungerar kan vi se att Ziegler-Nichols föreslår att man vid P-reglering ska arbeta med en regulator med förstärkningsmarginalen $A_m = 2$.

Regulator	K	T_i	T_d
P	$0.5K_0$		
PI	$0.45K_0$	$T_0/1.2$	
PID	$0.6K_0$	$T_0/2$	$T_0/8$

Tabell 12.2 Rekommenderade regulatorinställningar enligt Ziegler-Nichols frekvensmetod.

Lambdametoden

Lambdametoden bygger på ett stegsvarsexperiment där man bestämmer processens statiska förstärkning K_p, en dödtid L och en tidskonstant T. Experimentet visas i figur 12.4. Först letar man upp den punkt där mätsignalen har störst derivata och ritar tangenten till kurvan genom denna punkt. Därefter bestämmer man skärningspunkten mellan denna tangent och den linje som anger nivån hos mätsignalen före stegändringen. Tiden från det att man gjorde stegändringen till denna skärningspunkt ger en skattning av dödtiden L. Tidskonstanten T beräknas därefter som den tid det tar för stegsvaret att nå upp till 63 % av slutvärdet. Processens statiska förstärkning K_p kan man slutligen bestämma genom att dividera mätsignaländringen med styrsignaländringen:

$$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

Till skillnad från Ziegler-Nichols metoder har Lambdametoden en parameter som användaren kan välja, nämligen den önskade tidskonstanten hos slutna systemet. Denna tid kallas lambda λ.

Den ursprungliga Lambdametoden behandlade enbart PI-regulatorn och den ges av

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{K_p} \frac{T}{L+\lambda} \\ T_i &= T \end{aligned} \tag{12.1}$$

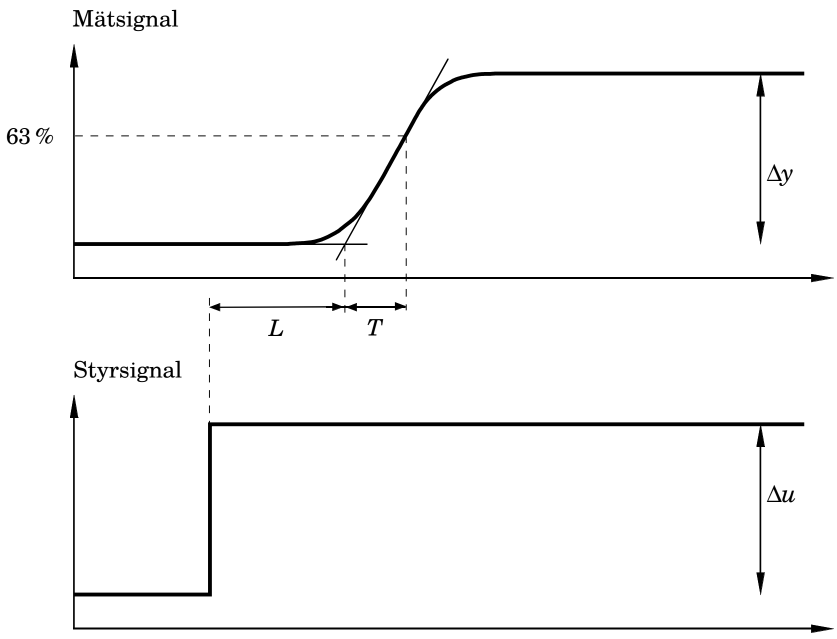
Vi ser här att integraltiden alltid väljs till processens tidskonstant T. Förstärkningen är däremot beroende av valet av λ. Ett vanligt val är $\lambda = T$, vilket innebär att man försöker göra det slutna systemet lika snabbt som processen.

Regulatorparametrarna är framtagna på följande sätt. Processen och regulatorn ges av

$$G_P(s) = \frac{K_p e^{-sL}}{1+sT} \qquad G_R(s) = K\frac{1+sT_i}{sT_i}$$

Eftersom $T_i = T$ blir kretsöverföringsfunktionen

$$G_0(s) = \frac{K_P K e^{-sL}}{sT}$$



Figur 12.4 Bestämning av K_p, L och T ur ett stegsvarsexperiment.

Slutna systemets överföringsfunktion mellan referensvärde och mätsignal blir därför

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{K_P K e^{-sL}}{sT + K_p K e^{-sL}} \approx \frac{K_P K e^{-sL}}{sT + K_p K(1 - sL)} = \frac{e^{-sL}}{1 + s(T/(K_p K) - L)}$$

där approximationen består av att dödtiden i nämnaren har ersatts av de första termerna i dess Taylorserieutveckling. Det slutna systemet ges alltså av ett första ordningens system med samma dödtid som processens och med tidskonstanten $\lambda = T/(K_p K) - L$. Genom att specificera λ bestäms K enligt ekvationen (12.1).

Den ursprungliga Lambdametoden togs som sagt fram enbart för PI-regulatorn, men man kan härleda formler för PID-regulatorn i samma anda som för PI-regulatorn. Här approximeres dödtiden i slutna systemets nämnare inte med en Taylorserieutveckling utan med $e^{-sL} \approx (1 - sL/2)/(1 + sL/2)$. Integral- och derivatatiderna väljs så att poler i kretsöverföringsfunktionen förkortas, precis som för PI-regulatorn. Reglerna för serie- och parallellformen ges av

$$K' = \frac{1}{K_p} \frac{T}{L/2 + \lambda} \qquad K = \frac{1}{K_p} \frac{L/2 + T}{L/2 + \lambda}$$

$$T_i' = T \qquad T_i = T + L/2$$

$$T_d' = \frac{L}{2} \qquad T_d = \frac{TL}{L + 2T}$$

12.3 Börvärdeshantering

En regulator har normalt två insignaler, referensvärdet r och mätsignalen y, och en utsignal, styrsignalen u. När vi har analyserat och beräknat regulatorer har vi normalt antagit att reglerstrukturen ser ut som i figur 12.5.

Det går utmärkt att anta denna standardstruktur när man analyserar slutna systemets poler och stabilitetsmarginaler. Vi kan också anta denna struktur när vi beräknar slutna systemets egenskaper vid laststörningar. Däremot hanteras referensvärden oftast inte som i figur 12.5. I figur 12.5 bildar man reglerfelet $e = r - y$ och låter detta bli insignal till regulatorn så att

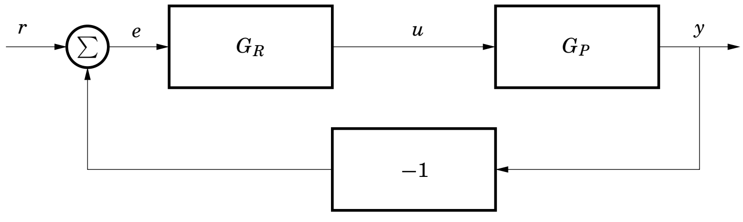
$$U = G_R E = G_R(R - Y)$$

Det betyder att referensvärde och mätsignal behandlas lika i regulatorn. Det behöver de inte alls göra. Oftast vill man behandla dem på olika sätt. Detta ska vi ge exempel på längre fram i föreläsningen.

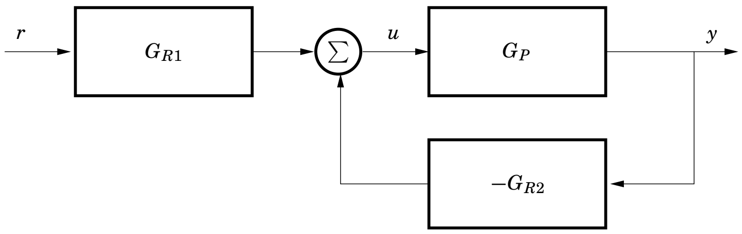
En mer generell regulatorstruktur visas i figur 12.6. Här ges styrsignalen av

$$U = G_{R1} R - G_{R2} Y$$

Man brukar säga att regulatorstrukturen i figur 12.6 har två frihetsgrader, eftersom vi nu har friheten att behandla de två signalerna olika. Denna frihet brukar man använda till att förbättra regleringen med avseende på referensvärdesändringar.



Figur 12.5 Standardstrukturen för den enkla reglerkretsen.



Figur 12.6 Struktur med två frihetsgrader

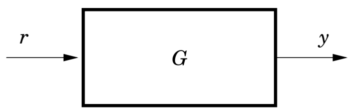
En PID-regulator som är inställd för att ge bra reglering vid laststörningar ger ofta stora överslängar vid stegändringar i börvärdet om standardstrukturen används. Därför brukar man i processreglersammanhang modifiera PID-regulatorn. Detta ska vi beskriva i nästa avsnitt. Dessutom brukar man ibland låta stegändringen i börvärdet passera genom en rampfunktion eller ett lågpassfilter för att ytterligare minska överslängen.

I servosammanhang är ofta referensvärdesföljning huvudmålet för regleringen. Där lägger man ofta ner en stor del av regulatorberäkningen på att få en bra följning av referensvärdet.

Nollställen

Tidigare i kursen har vi sett att överföringsfunktionens poler har en avgörande betydelse för slutna systemets egenskaper. Nollställenas betydelse har vi däremot inte diskuterat. Vi ska nu visa att nollställena har stor betydelse när det gäller börvärdeshanteringen.

Vi utgår från en reglerkrets med överföringsfunktionen $G(s)$, mätsignalen y och insignalen referensvärdet r enligt figur 12.7. I figur 12.8 visas svaret y och derivatan av svaret $\dot{y}$ på en stegändring i referensvärdet r.



Figur 12.7 Ursprunglig överföringsfunktion G där mätsignalen y är utsignal och referensvärdet r är insignal

Antag nu att överföringsfunktionen utvidgas med ett nollställe i $s = z$, så att den nya överföringsfunktionen mellan referensvärde och mätsignal ges av

$$G_1(s) = G(s)\left(1 - \frac{s}{z}\right)$$

Vi betecknar den nya mätsignalen y_1. Man kan beskriva den nya reglerkretsen enligt blockschemat i figur 12.9. I figuren framgår det att den nya mätsignalen y_1 kan beskrivas som en viktad summa av den gamla mätsignalen y och dess derivata $\dot{y}$, eftersom

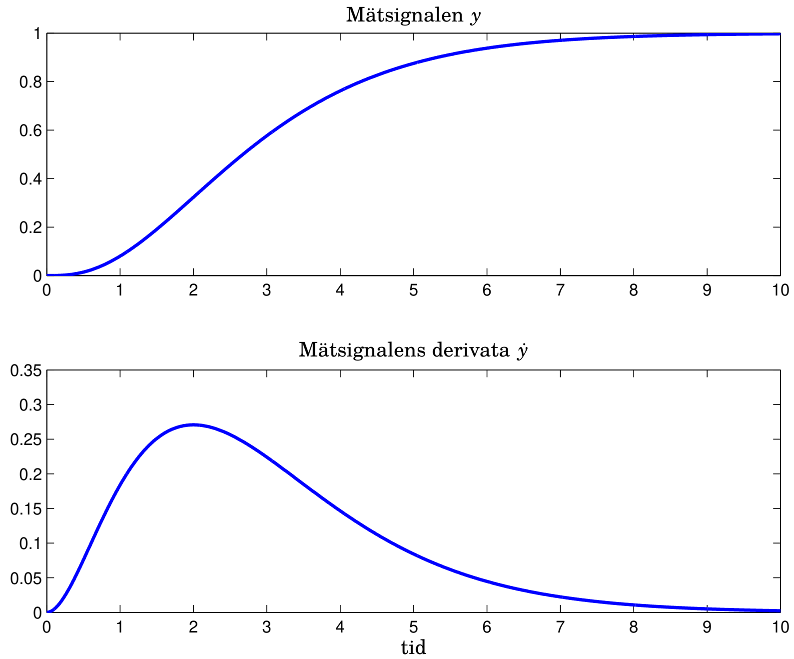
$$y_1 = y - \frac{1}{z}\dot{y}$$

Nollställets position z avgör hur denna viktning sker. Nollstället har störst inverkan då det ligger nära origo, det vill säga då $|z|$ är liten.

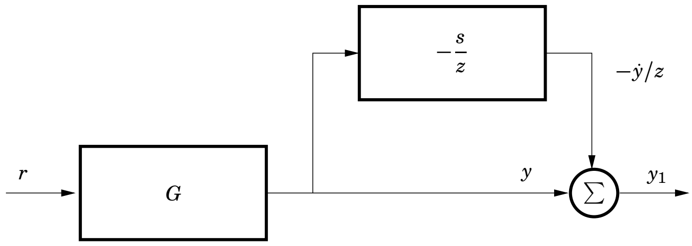
I figur 12.10 visas stegsvaren för några olika värden på nollstället z. Stegsvaren ges av en viktning av de två signalerna i figur 12.8.

För positiva värden på z, det vill säga då nollstället ligger i högra halvplanet, kommer vikten framför stegsvarets derivata $\dot{y}$ att vara negativ. Det innebär att stegsvaret till en början går i negativ riktning.

För negativa värden på z, det vill säga då nollstället ligger i vänstra halvplanet, kommer vikten framför stegsvarets derivata $\dot{y}$ att vara positiv. Det innebär att vi



Figur 12.8 Stegsvaret och dess derivata för systemet $G(s) = (s+1)^{-3}$



Figur 12.9 Blockschema för systemet $G_1 = G(1 - s/z)$

får ett snabbare svar och att vi kan få stora överslängar om nollstället ligger nära origo.

Nollställen diskuteras närmare i nästa avsnitt i samband med viktning av börvärden i PID-regulatorn.

12.4 Praktiska modifieringar av PID-regulatorn

PID-regulatorns grundläggande form ges av ekvationen

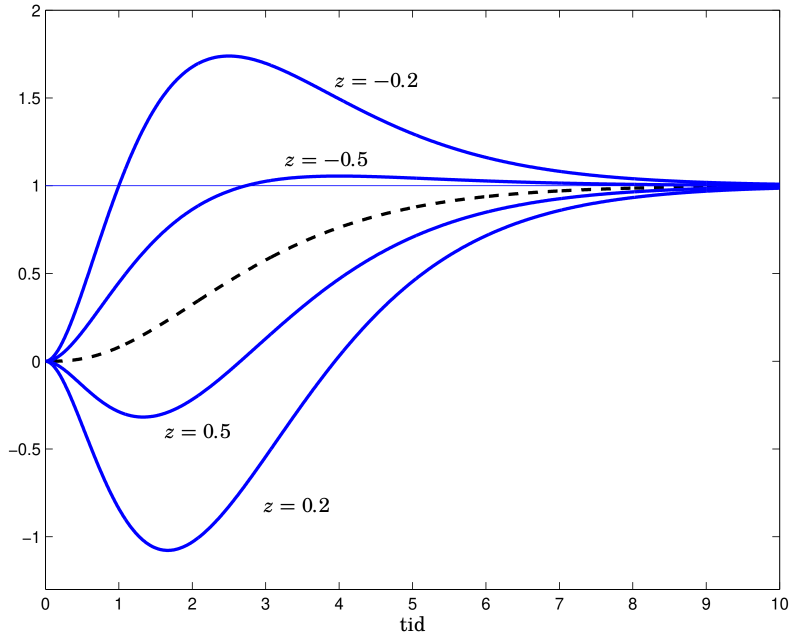
$$u = K\left(e + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{de}{dt}\right)$$

För att få en praktiskt användbar regulator brukar denna form modifieras på flera olika sätt. Vi ska här ta upp de vanligaste av dessa modifieringar och gör det genom att behandla de tre termerna var för sig.

Modifiering av P-delen

Proportionaltermen i PID-regulatorn ges av

$$u_P = Ke$$



Figur 12.10 Stegsvaret för systemet $G_1(s) = (s+1)^{-3}(1 - s/z)$ för olika värden på nollstället z. Den streckade kurvan visar det nominella fallet utan nollställe.

En vanlig modifiering är att ändra P-delen till

$$u_P = K(br - y)$$

där b är en viktfaktor som normalt väljes så att $0 \leq b \leq 1$. Man utnyttjar med andra ord att regulatorn har två frihetsgrader och behandlar r och y olika.

Anledningen till att man ibland vill reducera referensvärdet i P-delen är dels att man på det sättet kan reducera överslängen vid stegändringar i r, dels att man undviker alltför snabba ändringar i styrsignalen och därmed slitage på utrustningen vid snabba börvärdesändringar.

För en PI-regulator med börvärdesviktning ges styrsignalen av

$$U = K\left(bR - Y + \frac{1}{sT_i}(R - Y)\right) = K\frac{1 + sbT_i}{sT_i}R - K\frac{1 + sT_i}{sT_i}Y$$

Börvärdesviktningen påverkar nollstället i överföringsfunktionen mellan r och u. För standardstrukturen då $b = 1$ ligger nollstället i $s = -1/T_i$. Börvärdesviktningen b flyttar detta nollställe till $s = -1/(bT_i)$. Om $0 \leq b < 1$ kommer nollstället att flyttas längre in i vänstra halvplanet, vilket vi nyss sett innebär att överslängen minskar.

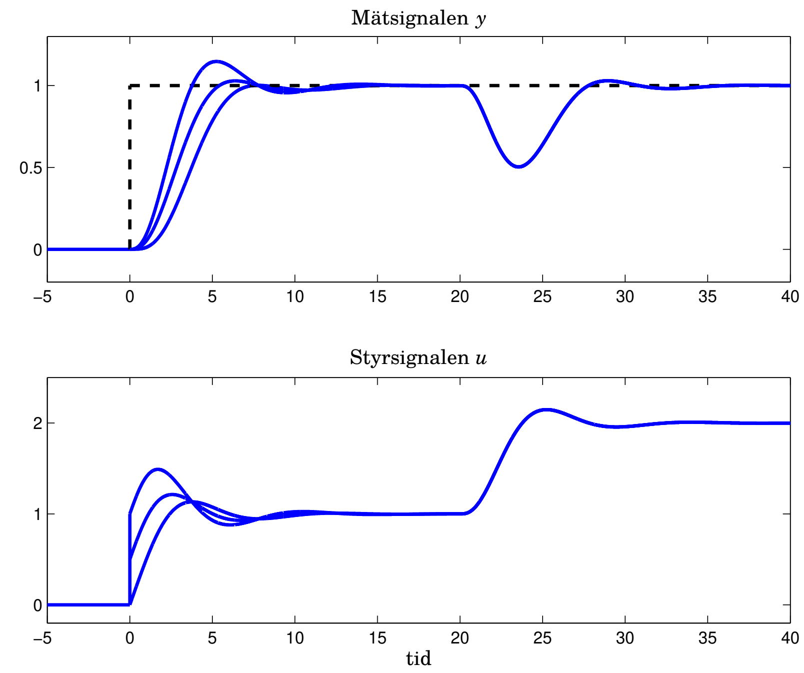
I figur 12.11 visas reglering med en PI-regulator där viktfaktorn b varierats. Figuren visar en referensvärdesändring följd av en laststörning. Av figuren framgår att regleringen av laststörningen är opåverkad av b, medan svaret på referensvärdesändringen påverkas. Ju mindre b är desto mindre blir överslängen och stegändringen i styrsignalen vid börvärdesändringen.

Modifiering av I-delen

Integraltermen i PID-regulatorn ges av

$$u_I = \frac{K}{T_i}\int e(t)dt$$

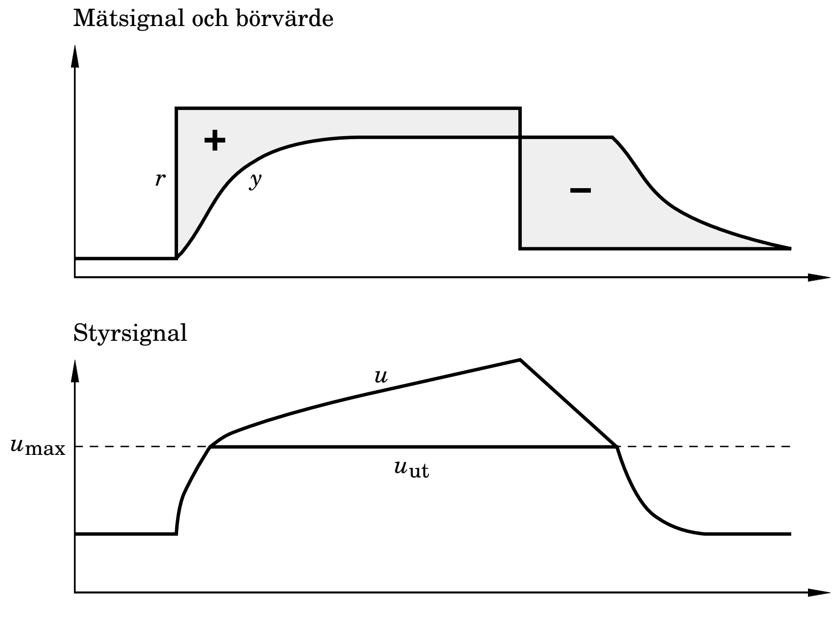
Integraltermens funktion är att se till att stationära fel försvinner. Det är därför viktigt att det är just reglerfelet vi integrerar, vilket innebär att vi inte ska ha någon börvärdesviktning i I-delen.



Figur 12.11 PI-reglering av processen $G_P(s) = (s+1)^{-3}$ med en PI-regulator. Börvärdesviktningen b är vald till $b = 0$ (långsammaste svaret), $b = 0.5$ och $b = 1$ (snabbaste svaret). Figuren visar svaret på en stegändring i börvärdet vid $t = 0$ och i lasten vid $t = 20$.

En instabil process kräver återkoppling för att stabiliseras. En integralterm i regulatorn gör att regulatorn är instabil och därför också måste stabiliseras genom återkoppling. När signalerna i reglerkretsen begränsas kan man därför få problem, eftersom återkopplingen då inte längre fungerar. Vi illustrerar vad som kan hända i figur 12.12.

I figur 12.12 visas styrsignalen, mätsignalen och börvärdet i ett fall där styrsignalen blir begränsad. Efter den första börvärdesändringen växer styrsignalen upp till sin övre gräns $u_{\max}$. Denna styrsignal är inte tillräckligt stor för att eliminera



Figur 12.12 Integratoruppvridning vid begränsning av styrsignalen.

reglerfelet. Därför kommer integralen av reglerfelet och därmed integraltermen u_I att växa linjärt. Det innebär i sin tur att den önskade styrsignalen också växer. Vi får därför en skillnad mellan den önskade styrsignalen u och den styrsignal som verkligen ställs ut, u_{ut}.

I figur 12.12 visas vad som händer då börvärdet efter en tid sänks till en nivå där regulatorn kan reglera bort felet. Ändringen i börvärdet gör att reglerfelet byter tecken, vilket i sin tur innebär att integraldelen och därmed u nu börjar sjunka. På grund av att integraldelen fått växa och bli stor under tiden då styrsignalen varit begränsad, kommer emellertid den verkliga styrsignalen u_{ut} att ligga kvar en längre tid vid begränsningen.

Problemet kallas integratoruppvridning (windup på engelska). Det enklaste sättet att komma tillrätta med problemet är att sluta uppdatera integraldelen när styrsignalen begränsas. För detta krävs naturligtvis att regulatorn vet vad gränserna är. De flesta industriella PID-regulatorer är utrustade med metoder för att undvika integratoruppvridning. Dessa metoder kallas anti-windup.

Modifiering av D-delen

Derivatatermen i PID-regulatorn ges av

$$u_D = KT_d \frac{de}{dt} = KT_d \left(\frac{dr}{dt} - \frac{dy}{dt} \right)$$

Om man deriverar reglerfelet e på detta sätt får man mycket stora ändringar i u_D vid snabba variationer i e. Vi ska göra två modifieringar av D-delen som hanterar problemet med alltför snabba ändringar i r respektive y.

Det är mycket vanligt att man helt undviker referensvärdet r i derivatadelen, så att derivatatermen blir

$$u_D = -KT_d \frac{dy}{dt}$$

I många sammanhang, speciellt inom processindustrin, är referensvärdet konstant under långa tider. När det väl görs en ändring i referensvärdet är det ofta snabbt. I dessa sammanhang är det vettigt att inte ta med referensvärdet i derivatadelen, eftersom derivatan av referensvärdet är noll under långa tider. Vid referensvärdesändringar är derivatan å andra sidan så stor att man får oönskade stora steg i styrsignalen som sliter på utrustningen.

I servosammanhang och i de fall man inte har snabba variationer i referensvärdet kan man naturligtvis fortfarande ha referensvärdet med i derivatadelen.

Snabba högfrekventa variationer i mätsignalen y är sällan orsakade av variationer i själva processen, utan av mätbrus. Dessa högfrekventa signaler ska man inte derivera. I Bodediagrammet för PID-regulatorn, figur 12.1, ser man tydligt att förstärkningen växer då frekvensen växer. En viss förstärkningsökning i regulatorn vill man ha. Det är ju den som gör att man kan öka skärfrekvensen och höja fasmarginalen. Å andra sidan finns det ingen anledning att fortsätta med denna höjning vid höga frekvenser. Därför brukar man komplettera derivatatermen med ett lågpassfilter, så att derivatatermens överföringsfunktion ändras enligt

$$KT_d s \quad \longrightarrow \quad \frac{KT_d s}{1 + sT_f}$$

Lågpassfiltrets tidskonstant T_f brukar ofta väljas automatiskt till en faktor N av derivatatiden, det vill säga

$$T_f = \frac{T_d}{N}$$

där N normalt är i intervallet $[5, 10]$.

Den pol lågpassfiltret bidrar med till PID-regulatorns överföringsfunktion medför att högfrekvensförstärkningen blir $K(1 + N)$, det vill säga konstant i stället för växande. Ofta vill man minska störningskänsligheten ytterligare genom att införa ytterligare filtrering så att högfrekvensförstärkningen inte är konstant utan avtagande för höga frekvenser.

Föreläsning 13

Regulatorstrukturer och implementering

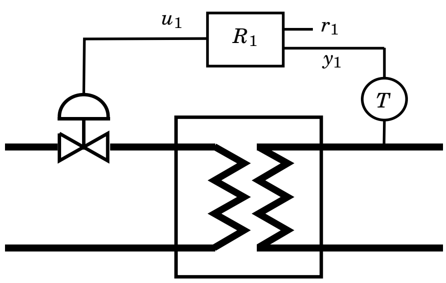
Hittills har vi studerat reglertekniska problem som bygger på strukturen hos den enkla reglerkretsen med *en* mätsignal och *en* styrsignal. I praktiken har man ofta tillgång till fler signaler för att lösa de olika reglerproblemen. Det finns flera mycket vanliga grundkopplingar där man utnyttjar flera signaler. Vi ska här gå igenom tre av de vanligaste av dessa kopplingar, nämligen kaskadkoppling, framkoppling och dödtidskompensering. Slutligen tar vi upp några frågor som har att göra med det faktum att regulatorer numera för det mesta implementeras i datorer i stället för i analoga konstruktioner.

13.1 Kaskadkoppling

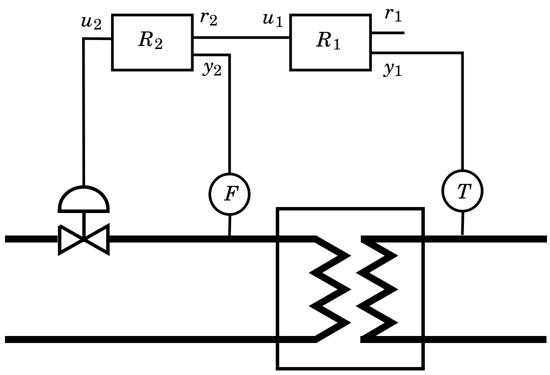
Kaskadreglering är en reglerstrategi som bygger på en kombination av två regulatorer, där utsignalen från den ena regulatorn bildar börvärde till den andra. Detta illustreras i följande exempel.

EXEMPEL 13.1—REGLERING AV VÄRMEVÄXLARE
Vi ska studera regleringen av en värmeväxlare där ånga på primärsidan värmer upp vatten på sekundärsidan. Vi vill reglera temperaturen på sekundärsidan genom att styra ångventilen på primärsidan. Det kan man göra genom att låta temperaturregulatorn arbeta direkt på ångventilen som i figur 13.1. Det som egentligen påverkar temperaturen är inte ångventilens läge, utan ångflödet. Om ventilen är linjär och ångtrycket inte varierar är detta inte något problem, eftersom det då råder ett konstant förhållande mellan ventilläget och ångflödet. Vanligtvis är dock både ventilen olinjär och ångtrycket varierande.

Antag t.ex. att ångtrycket på primärsidan plötsligt minskar. Då kommer ångflödet att minska vilket leder till att vattnet på sekundärsidan inte värms upp lika mycket. Temperaturregulatorn kommer då att ge order om en större ventilöppning och efter ett tag kommer ångflödet åter att vara det rätta. Denna reglerstrategi



Figur 13.1 Temperaturreglering av värmeväxlare.



Figur 13.2 Kaskadreglering av en värmeväxlare.

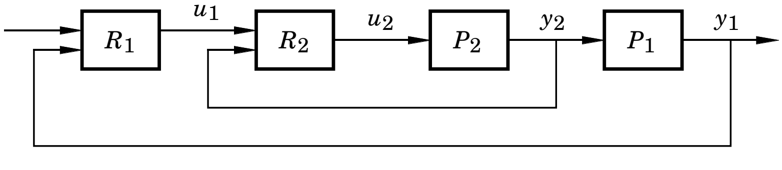
fungerar med andra ord, men till priset att man kan få ganska stora störningar i temperaturen.

Om man kan mäta ångflödet kan man koppla in en flödesregulator enligt figur 13.2. Vi bildar en inre reglerkrets som ser till att ångflödet regleras. Börvärdet till flödesregulatorn R_2 ges av styrsignalen från temperaturregulatorn R_1. Detta är kaskadreglering.

Kaskadregleringen innebär att huvudregulatorn R_1 får en enklare arbetsuppgift. I stället för att R_1 skall utföra hela arbetet överlåtes en del av arbetet till regulatorn R_2. Regulatorn R_1 behöver nu endast tala om vilket flöde den vill ha. Sedan får flödesregulatorn se till att vi verkligen håller det önskade flödet. En tryckvariation kommer snabbt att regleras ut av flödesregulatorn, vilket innebär att temperaturen inte behöver störas lika mycket som när man inte använder kaskadreglering. □

Den allmänna principen för kaskadreglering visas i figur 13.3. Det primära målet är att styra signalen y_1 med hjälp av regulatorn R_1. Det hade man kunnat göra genom att enbart använda regulatorn R_1 och låta dess styrsignal gå direkt in på processen. Vid kaskadreglering utnyttjar man emellertid att man har tillgång till ytterligare en mätsignal, y_2. Genom att göra en lokal återkoppling från y_2 via regulatorn R_2 kan man uppnå en effektivare reglering än med bara en regulator. Regulatorn R_1 kallas ofta primärregulator och regulatorn R_2 sekundärregulator. Andra beteckningar är ”master” respektive ”slave”.

Kaskadreglering är ett typexempel på hur man med den enkla strukturen hos PID-regulatorn kan uppnå mer avancerade reglerlösningar genom att kombinera flera regulatorer. Den främsta anledningen till att använda kaskadreglering är att man på det sättet kan ta hand om störningar som kommer in på processavsnittet P_2 snabbare, innan de hinner ge upphov till störningar i den primära mätsignalen y_1. Ett exempel på detta är tryckvariationerna i exemplet ovan. En förutsättning för att detta skall lyckas är naturligtvis att den inre reglerkretsen är väsentligt snabbare än den yttre reglerkretsen. En annan fördel med kaskadreglering är att dynamiken hos den process som primärrregulatorn skall reglera kan förenklas. Utan kaskadreglering arbetar regulatorn R_1 mot en process som består av processavsnitten P_1 och P_2. Med kaskadreglering förändras processavsnittet till kombinationen av P_1 och P_2 återkopplat med R_2.



Figur 13.3 Principen för kaskadreglering.

13.2 Framkoppling

Återkoppling är en effektiv metod för att lösa reglertekniska problem. Man mäter den signal som skall regleras, jämför den med ett börvärde och beräknar därefter en styrsignal baserat på denna jämförelse. Återkopplingsprincipen har dock den nackdelen att regulatorn inte reagerar på en störning förrän ett reglerfel redan har uppkommit. I många fall är det möjligt att mäta en störning innan den hunnit ge upphov till ett reglerfel. Genom att kompensera för störningen redan innan ett reglerfel uppstått kan man ofta få en dramatiskt förbättrad reglering. Denna teknik kallas framkoppling.

Ett välkänt exempel på användning av framkoppling är regleringen av temperaturen i bostadshus. På de flesta hus finns en termometer som mäter utomhustemperaturen. Utomhustemperaturen är ju den största och viktigaste störningen vid regleringen av inomhustemperaturen. Genom att utnyttja informationen om utomhustemperaturen kompenserar man för variationer i denna redan innan de påverkat inomhustemperaturen. Om t.ex. utomhustemperaturen sjunker resulterar detta i en ökning av vattentemperaturen i radiatorerna trots att inomhustemperaturen ännu inte har börjat sjunka. Med hjälp av denna framkoppling kan man minska variationerna i inomhustemperaturen väsentligt.

Avgörande för hur effektiv framkopplingen är, är hur tidigt vi kan mäta störningen. Om vi kan mäta störningen långt innan dess effekt syns i mätsignalen är framkopplingen effektiv, speciellt om processen har en lång dödtid. Om vi mäter störningen så sent att dess effekt redan syns i mätsignalen är det oftast ingen idé att framkoppla. Det är i det fallet lika bra att låta regulatorn hantera störningen via återkopplingen.

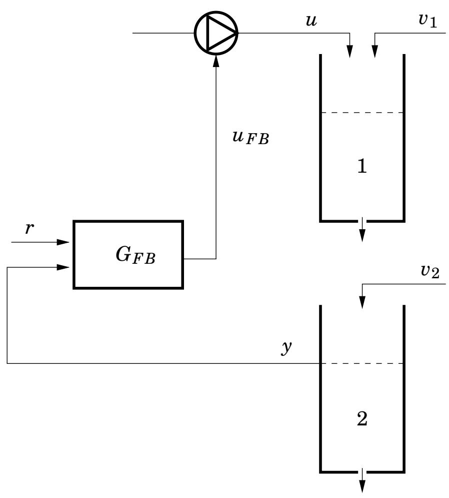
Vi illustrerar framkoppling och hur framkopplingen beräknas med ett exempel.

EXEMPEL 13.2—FRAMKOPPLING AV STÖRFLÖDEN I TANKPROCESS

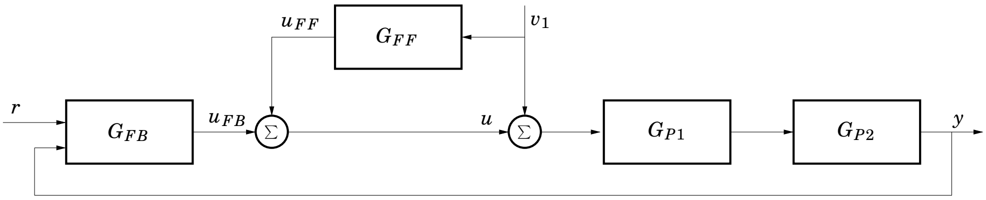
I figur 13.4 visas en process bestående av två tankar. Vatten pumpas in i den övre tanken och målet är att reglera nivån i den undre tanken. I exemplet ska vi studera två olika fall av störningar. I det första fallet antar vi att ett störflöde v_1 kommer in i den övre tanken och i det andra fallet antar vi att störflödet v_2 kommer in i den undre tanken.

Man behöver naturligtvis inte göra något speciellt åt dessa störflöden, utan kan lösa reglerproblemet via den vanliga återkopplingen. Om flödena är mätbara kan vi dock förbättra regleringen väsentligt genom att införa framkoppling.

Vi börjar med att studera det första fallet då störflödet kommer in i den övre tanken. Reglerproblemet beskrivs i blockschemat i figur 13.5



Figur 13.4 Framkoppling i exempel 13.2.



Figur 13.5 Framkoppling i exempel 13.2 då störflödet v_1 kommer in i den övre tanken.

Överföringsfunktionen G_{P1} beskriver sambandet mellan inflödet och utflödet i den övre tanken, medan G_{P2} beskriver sambandet mellan inflödet och nivån i den undre tanken. Här har vi bortsett från pumpens dynamik och antagit att styrsignalen u ger det styrda flödet. Den vanliga återkopplingsdelen av regulatorn ges av överföringsfunktionen G_{FB}, som alltså bestämmer återkopplingstermen u_{FB} i styrsignalen baserat på referensvärdet r och mätsignalen y.

Slutligen har vi störsignalen v_1. Eftersom störflödet kommer in på samma ställe som det styrda flödet adderas det till ingången på processen. Störsignalen v_1 skickas till framkopplingsdelen av regulatorn G_{FF}, vilket resulterar i att vi får en framkopplingsterm u_{FF}. Regulatorns styrsignal ges alltså av

$$u = u_{FB} + u_{FF}$$

I detta exempel är det uppenbart hur framkopplingsdelen av regulatorn ska bestämmas. Om vi väljer $G_{FF} = -1$ så att

$$U_{FF} = G_{FF} V_1 = -V_1$$

kommer störflödet aldrig att ge upphov till någon ändring i nivån y. Det är ju också uppenbart i figur 13.4 att en ändring i störflödet v_1 bör ge upphov till en lika stor ändring i det styrda flödet u med omvänt tecken.

Vi övergår nu till att studera problemet då störflödet v_2 kommer in i den undre tanken. Blockschemat för problemet visas i figur 13.6.

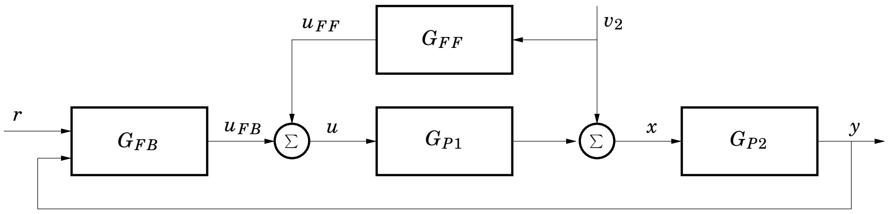
Den optimala framkopplingen är en framkoppling som gör att effekten av variationer i störsignalen aldrig syns i mätsignalen. Vi kan alltså räkna ut den optimala framkopplingsöverföringsfunktionen G_{FF} genom att beräkna överföringsfunktionen mellan v_2 och y och sedan välja G_{FF} så att denna överföringsfunktion blir noll. Vi behöver dock inte göra detta. Det räcker att betrakta överföringsfunktionen mellan v_2 och signalen x i figur 13.6. Signalen x svarar mot inflödet till den undre tanken.

Överföringsfunktion mellan v_2 och x fås ur

$$X = V_2 + G_{P1}(U_{FB} + U_{FF}) = G_{P1} U_{FB} + (1 + G_{P1} G_{FF}) V_2$$

Detta ger den optimala framkopplingsdynamiken

$$G_{FF} = -\frac{1}{G_{P1}}$$



Figur 13.6 Framkoppling i exempel 13.2 då störflödet v_2 kommer in i den undre tanken.

vilket alltså resulterar i framkopplingstermen

$$U_{FF} = G_{FF}V_2 = -\frac{1}{G_{P1}}V_2$$

De flesta processer är av lågpasskaraktär, vilket innebär att förstärkningen avtar vid höga frekvenser. Detta betyder att överföringsfunktioner för processer för det mesta har fler poler än nollställen. En modell för en tank vi använt tidigare är t.ex.

$$G_{P1}(s) = \frac{1}{s+a}$$

Vid beräkning av optimala framkopplingsöverföringsfunktioner G_{FF} får man alltid uttryck som innebär att man måste invertera den delen av processdynamiken som finns mellan styrsignalen u och den plats där störningen påverkar processen. I fallet med störningen v_1 var detta inget problem, eftersom det inte fanns någon sådan dynamik. Störsignalen kom ju där in på samma plats som styrsignalen. I det aktuella fallet får vi däremot följande framkopplingsterm i styrsignalen:

$$U_{FF} = -\frac{1}{G_{P1}}V_2 = -(s+a)V_2$$

Detta betyder att vi ska derivera störflödet v_2, vilket man oftast försöker undvika, eftersom det ger upphov till störningskänslighet och stora variationer i styrsignalen. Antingen kan man komplettera framkopplingen med ett lågpassfilter eller, vilket är vanligast, helt enkelt stryka de deriverande termerna och nöja sig med den statiska framkopplingen

$$u_{FF} = -av_2$$

□

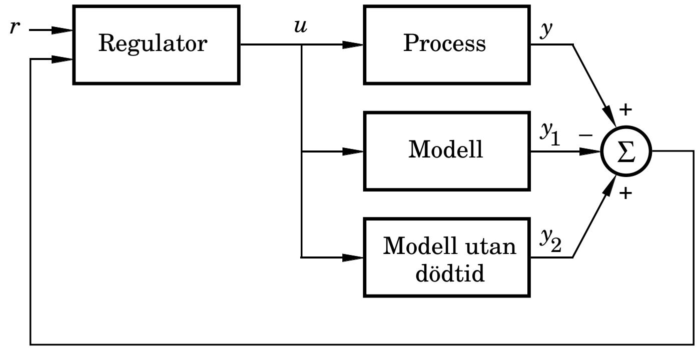
13.3 Dödtidskompensering

Derivatadelen i en PID-regulator används för att prediktera framtida värden på mätsignalen genom att studera dess derivata. Denna prediktionsmetod fungerar dåligt när processen har en lång dödtid. Man kan naturligtvis reglera processer med lång dödtid med en vanlig PI-regulator, men eftersom vi har tagit bort derivatadelen har vi fått en regulator som inte predikterar. Detta är en stor nackdel, eftersom en prediktion av framtida reglerfel är till stor hjälp just när vi har långa dödtider. Därför har man konstruerat speciella regulatorer för processer med långa dödtider som klarar av att prediktera framtida reglerfel, men då inte baserat på derivatan av mätsignalen.

Principen för dödtidsregulatorer är att man istället för att studera mätsignalen vid prediktionen studerar styrsignalen. Genom att bilda en modell av processen som skall regleras och låta styrsignalen gå in till modellen, kan man simulera hur mätsignalen kommer att se ut under den närmaste framtiden. Den vanligaste dödtidsregulatorn kallas för Otto-Smith-regulatorn. Principen bakom den visas i figur 13.7.

Otto-Smith-regulatorn behöver förutom de vanliga regulatorparametrarna känna en modell av processen. Speciellt måste man ange hur lång dödtiden är. I figuren ser vi att styrsignalen förutom att gå in till processen får gå in till dels en modell av processen, dels en modell av processen med dödtiden borttagen.

Låt oss för enkelhets skull anta att modellen är en exakt beskrivning av processen. De två signalerna y och y_1 kommer då att vara identiska, och därför helt ta ut varandra. Kvar som signal in till regulatorn blir då signalen y_2, det vill säga den signal vi hade fått om vi inte hade haft någon dödtid i vår process. På detta sätt kommer regulatorn att arbeta mot en simulerad process som är identisk med den



Figur 13.7 Principen för Otto-Smith-regulatorn.

verkliga processen bortsett från att dödtiden är borttagen. Regleringen blir också lika bra som den hade blivit om vi inte hade någon dödtid, frånsett det faktum att mätsignalen naturligtvis fortfarande är fördröjd.

I praktiken är naturligtvis inte modellen en exakt beskrivning av processen. Det innebär att det inte är exakt y_2 som går tillbaka till regulatorn. Detta innebär i sin tur att man normalt måste ställa in regulatorn försiktigare än vad man hade gjort om ingen dödtid fanns.

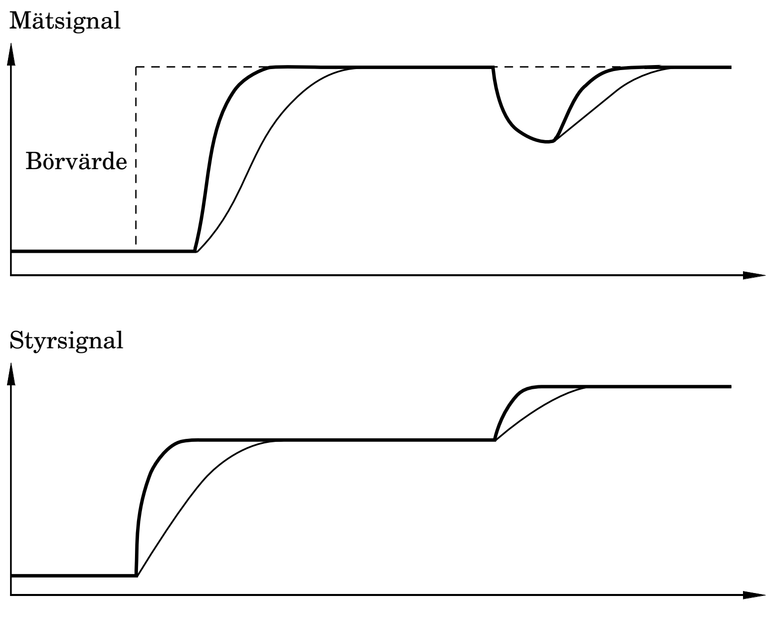
Vi skall nu visa ett exempel på hur en reglering med Otto-Smith-regulatorn fungerar.

EXEMPEL 13.3—OTTO-SMITH-REGULATORN

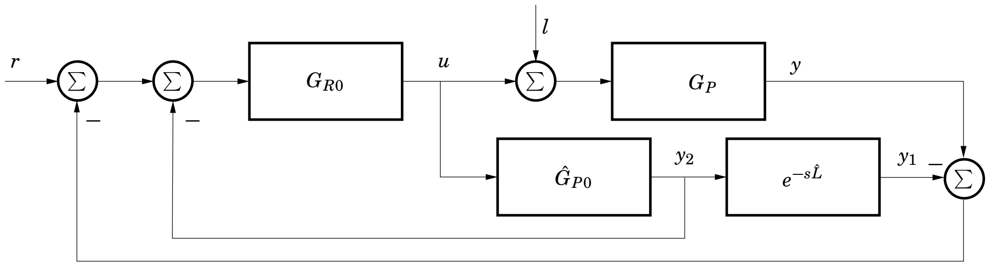
I figur 13.8 visas regleringen av en första ordningens process med dödtid. Figuren visar både resultatet av reglering med en PI-regulator och med en Otto-Smith-regulator.

PI-regulatorn är inställd så att den ger en så snabb reglering som möjligt vid stegändringar i börvärdet, men utan översläng. När börvärdesändringen görs börjar styrsignalen försiktigt integrera reglerfelet. Integreringen sker så långsamt att ingen översläng erhålles.

Dödtidsregulatorn är också inställd så att den inte ger någon översläng. Regulatorn reagerar betydligt snabbare än PI-regulatorn när börvärdesändringen och



Figur 13.8 Jämförelse mellan Otto-Smith-regulatorn (tjocka linjer) och en PI-regulator (tunna linjer). Figuren visar regleringen vid en börvärdesändring följd av en laststörning.



Figur 13.9 Otto-Smith-regulatorn

laststörningen kommer. Vi ser att den stora vinsten uppkommer vid börvärdesändringar. Otto-Smith-regulatorn gör här hela sitt styringrepp innan mätsignalen har börjat reagera.

Vid laststörningar har ingen av regulatorerna någon möjlighet att agera förrän störningen syns i mätsignalen. Här kan bara framkoppling från störningen förbättra resultatet nämnvärt. □

Vi ska nu studera Otto-Smith-regulatorns funktion närmare. Regulatorn som beskrevs i figur 13.7 kan även beskrivas med blockschemat i figur 13.9. Processens överföringsfunktion ges av

$$G_P(s) = G_{P0}(s)e^{-sL}$$

Den skattade processen beskrivs på motsvarande sätt av överföringsfunktionen

$$\hat{G}_P(s) = \hat{G}_{P0}(s)e^{-s\hat{L}}$$

Regulatorn G_{R0} som ingår i Otto-Smith-regulatorn är oftast en enkel PI-regulator.

Ur blockschemat i figur 13.9 kan vi beräkna Otto-Smith-regulatorns styrsignal till

$$\begin{aligned} U &= G_{R0}(R - Y + Y_1 - Y_2) \\ &= G_{R0}(R - Y + \hat{G}_{P0}e^{-s\hat{L}}U - \hat{G}_{P0}U) \\ &= G_{R0}(R - Y) + G_{R0}\hat{G}_{P0}(e^{-s\hat{L}} - 1)U \end{aligned}$$

Om G_{R0} är en PI-regulator ser vi att Otto-Smith-regulatorn kan ses som en PI-regulator där man lagt till en term som drivs av styrsignalen u. Det är denna term som svarar för prediktionen. Jämfört med PID-regulatorn har vi med andra ord ersatt prediktion baserat på derivering av mätsignalen med en prediktion som bygger på en modell av processen, $\hat{G}_P$, och styrsignalen.

Om modellen är identisk med den verkliga processen, det vill säga om $\hat{G}_P = G_P$, och om vi inte har några störningar på processen kommer signalerna y och y_1 att vara identiska. Den enda signal som går tillbaka till regulatorn G_{R0} är då y_2. Det ger oss följande styrsignal:

$$U = G_{R0}(R - Y_2) = G_{R0}(R - G_{P0}U) = \frac{G_{R0}}{1 + G_{R0}G_{P0}}R$$

Detta ger oss i sin tur följande relation mellan referensvärdet och mätsignalen:

$$\frac{Y}{R} = \frac{G_P G_{R0}}{1 + G_{P0}G_{R0}} = \frac{G_{P0}G_{R0}}{1 + G_{P0}G_{R0}}e^{-sL}$$

Det betyder att vi har samma överföringsfunktion som vi hade haft om processen inte hade någon dödtid, $G_P = G_{P0}$, bortsett från att mätsignalen naturligtvis blir fördröjd tiden L. Idealt betyder detta i sin tur att regulatorn G_{R0} kan bestämmas på samma sätt som om ingen dödtid fanns. I själva verket gör modellfel och robusthetskrav att vi måste ta hänsyn till dödtiden och ställa in regulatorn mer konservativt. I kapitel 6 motiverade vi att skärfrekvensen inte bör väljas större än att villkoret $\omega_c L < 0.2$ är uppfyllt.

13.4 Sampling

På 30- och 40-talet, när tillverkningen av regulatorer tog fart på grund av industrialiseringen, tillverkades de flesta regulatorer i pneumatisk teknik. Ganska snart började även analoga elektriska regulatorer tillverkas. I mitten på 70-talet började man gå över till datorbaserade regulatorer och instrumentsystem. Idag har man analoga pneumatiska regulatorer i miljöer där man inte kan eller vill ha elektricitet. För övrigt är nästa alla regulatorer datorbaserade.

Det faktum att regulatorerna i själva verket är datorer betyder en hel del för implementeringen. I dessa regulatorer omvandlas de analoga insignalerna till diskreta signaler i A/D-omvandlare, och de diskreta utsignalerna omvandlas till analoga signaler i D/A-omvandlare.

I figur 13.10 visas en analog mätsignal och dess samplade realisering. I och med att man samplar en signal i stället för att behandla den analogt förlorar man information. Regulatorn får ingen information om mätsignalen mellan samplingstillfällena. Det är därför viktigt att samplingsfrekvensen är tillräckligt hög.

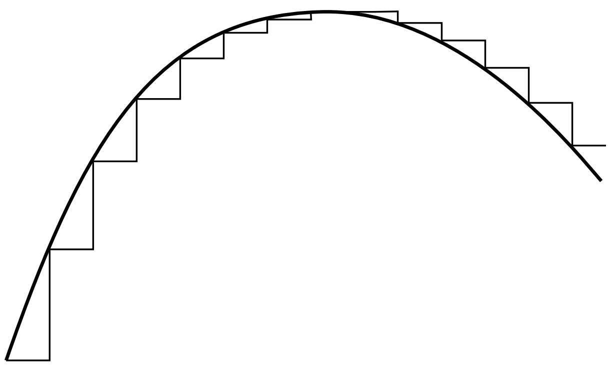
Om samplingsfrekvensen inte är tillräckligt hög kan man råka ut för något som kallas vikningseffekten eller aliasing. Problemet illustreras i figur 13.11. I figuren visas en signal s med en periodtid strax över en sekund som samplas med en samplingsperiod på en sekund. På grund av den relativt långa samplingsperioden kommer regulatorn inte att se signalen s, utan signalen s_a som är av betydligt lägre frekvens. Signalen s_a kallas för signalen s's alias. (Det är denna effekt som gör att diligenshjul och flygplanspropellrar ibland tycks stå stilla eller gå baklänges i filmer.)

Samplingsfrekvensen sätter en övre gräns för hur höga frekvenser som regulatorn kan se. I figur 13.11 ser vi att denna frekvens, som kallas Nyquistfrekvensen, är

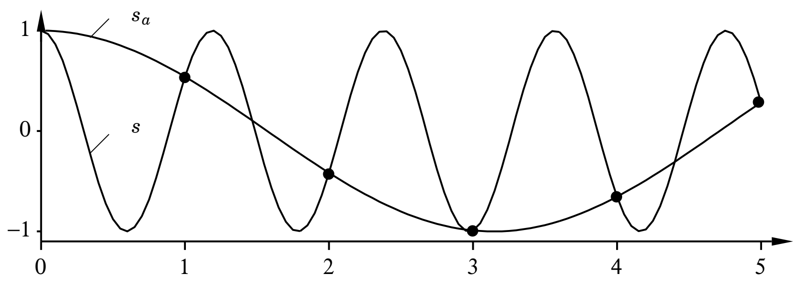
$$\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$$

där ω_s är samplingsfrekvensen. Vi måste med andra ord se till att samplingsfrekvensen är dubbelt så hög som den högsta frekvens vi är intresserade av att kunna representera i regulatorn.

Även om vi väljer samplingsfrekvensen tillräckligt hög för att kunna representera de intressanta signalerna i systemet har vi kvar problemet med högfrekvent brus. Det är viktigt att de analoga signalerna lågpassfiltreras *innan* de kommer till A/D-omvandlaren, så att komponenter över Nyquistfrekvensen elimineras. Om man inte gör det finns det risk för att högfrekventa störningar på grund av vikningseffekten dyker upp som lågfrekventa störningar i regulatorn.



Figur 13.10 En analog signal med en samplad realisering.



Figur 13.11 Illustration av vikningseffekten. Figuren visar den verkliga signalen s och dess alias s_a.

13.5 Diskretisering av PID-regulatorn

Om man vill implementera en kontinuerlig regulator, som t.ex. en PID-regulator, i en dator måste man approximera deriveringar och integreringar. Detta gör man helt enkelt så att deriveringar approximeras med differenser och integreringar med summeringar. Vi ska se hur en PID-regulator diskretiseras.

Vi utgår från följande analoga PID-regulator, för enkelhets skull given i Laplacetransform

$$U = K\left((bR - Y) + \frac{1}{sT_i}E - \frac{sT_d}{1 + sT_d/N}Y\right)$$

Detta är den version vi kom fram till efter de praktiska modifieringarna av standardformen i föregående föreläsning.

Den diskreta styrsignalen kan man skriva som

$$u(kh) = P(kh) + I(kh) + D(kh)$$

det vill säga som en summa av proportional-, integral- och derivatatermen. I uttrycket betecknar h samplingsintervallet och k är ett heltal. Den diskreta styrsignalen $u(kh)$ ska nu beskrivas som en funktion av regulatorns insignaler r och y vid samplingstidpunkterna $t = kh,\ (k-1)h,\ (k-2)h,\ \ldots$. Vi gör detta för en term i taget.

Diskretisering av P-delen

Den kontinuerliga P-delen är

$$u_P(t) = K(br(t) - y(t))$$

Eftersom P-delen inte innehåller någon dynamik blir den diskreta versionen helt enkelt

$$P(kh) = K(br(kh) - y(kh))$$

Diskretisering av I-delen

Den kontinuerliga integraltermen ges av

$$u_I(t) = \frac{K}{T_i}\int_0^t e(t)dt$$

Här måste vi nu approximera integralen och gör det genom att ersätta den med en summa.

$$I(kh) = \frac{K}{T_i} \cdot h \sum_{i=1}^{k} e(ih)$$

En mer användbar form för integraltermen är den rekursiva formen

$$I(kh) = I(kh - h) + \frac{Kh}{T_i}e(kh)$$

Diskretisering av D-delen

Från PID-regulatorns överföringsfunktion får vi följande ekvation för derivatatermen:

$$\left(1+\frac{sT_d}{N}\right)U_D = -KT_d sY$$

Genom att inverstransformera detta uttryck för vi följande ekvation för derivatatermen

$$u_D(t) + \frac{T_d}{N}\frac{du_D(t)}{dt} = -KT_d\frac{dy(t)}{dt}$$

Här måste vi approximera derivatorna och gör det genom att ersätta dem med differenser.

$$D(kh) + \frac{T_d}{N}\frac{D(kh)-D(kh-h)}{h} = -KT_d\frac{y(kh)-y(kh-h)}{h}$$

Derivatatermen blir därför

$$D(kh) = \frac{T_d}{T_d+Nh}D(kh-h) - \frac{KT_dN}{T_d+Nh}(y(kh)-y(kh-h))$$

Den diskreta PID-regulatorn vi nu tagit fram kommer att fungera ungefär som den kontinuerliga regulatorn under förutsättning att samplingsperioden är kort i förhållande till det slutna systemets dominerande tidskonstant. En tumregel är att samplingsintervallet bör väljas så kort att man åtminstone hinner sampla tio gånger under en tidskonstant.

Föreläsning 14

Exempel: Kulan på bommen

Denna föreläsning ska ägnas helt åt lösningen av ett konkret reglertekniskt problem. Målet är att denna genomgång ska illustrera den typiska arbetsgången vid lösningen av reglertekniska problem. Vi inleder därför med en modellbyggnadsdel där vi tar fram en matematisk beskrivning av processdynamiken. Därefter analyserar vi reglerproblemet och diskuterar olika möjligheter för lösningen. Slutligen väljer vi en strategi och utför beräkningen av regulatorn.

14.1 Modellbygge

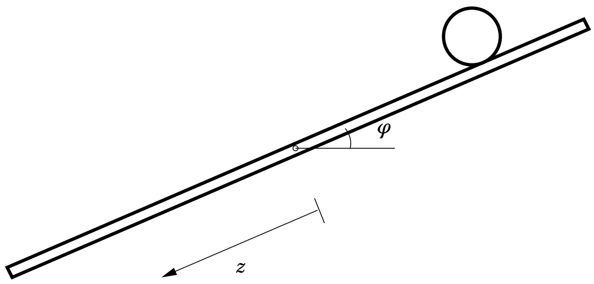
Den första uppgiften är att förstå hur processen fungerar och beskriva dess dynamiska egenskaper matematiskt. Vi börjar med att beskriva processen och dess funktion.

Processbeskrivning

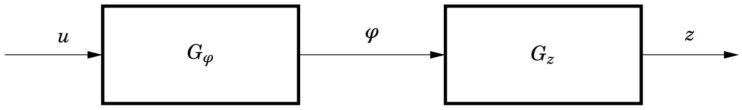
Processen är en laborationsprocess – ”Kulan på bommen”. Processen visas i figur 14.1. Grovt sett kan man dela in processen i tre delar, en kula, en bom med en ränna där kulan kan rulla och en elektrisk motor som vrider bommen. Målet för regleringen är att styra motorn så att bommen lutar på ett sådant sätt att kulan följer ett referensvärde.

Processen har en styrsignal, nämligen spänningen in till motorn. Det finns två mätsignaler, bommens vinkel i förhållande till horisontalplanet samt kulans läge på bommen. Kulans läge mäts med hjälp av en resistiv tråd utmed ena kanten på bommen.

Figur 14.1 Kulan på bommen



Figur 14.2 Schematisk beskrivning av bomprocessen med mätsignalerna φ och z.



Figur 14.3 Blockschemabeskrivning av bomprocessen

Schematiskt kan man beskriva processen enligt figur 14.2, där de två mätsignalerna vinkeln φ och kulans läge på bommen z finns markerade. Eftersom det finns två mätsignaler kan man dela in processens överföringsfunktion i två delar enligt figur 14.3. Den första delöverföringsfunktionen G_φ beskriver dynamiken mellan styrsignalen u och vinkeln φ. Den andra delöverföringsfunktionen G_z beskriver sambandet mellan bommens vinkel φ och kulans läge z. I modellbyggnadsdelen kommer vi att betrakta dessa två delar var för sig.

Dynamiken mellan styrsignalen och vinkeln

Motorn innehåller en intern återkoppling som gör att styrsignalen är proportionell mot bommens vinkelhastighet, det vill säga

$$\dot{\varphi} \approx k_\varphi u$$

där k_φ är en konstant. Detta kan man lätt övertyga sig om genom att göra ett stegsvarsexperiment på processen. Eftersom det är en integrerande process finns det bara ett jämviktsläge för styrsignalen då bommen är stilla. Om man från detta jämviktsläge gör en stegändring i styrsignalen kommer bommen att vridas med en konstant vinkelhastighet. Förstärkningen k_φ kan man bestämma experimentellt t.ex. genom att studera ett stegsvar eller genom en frekvensanalys.

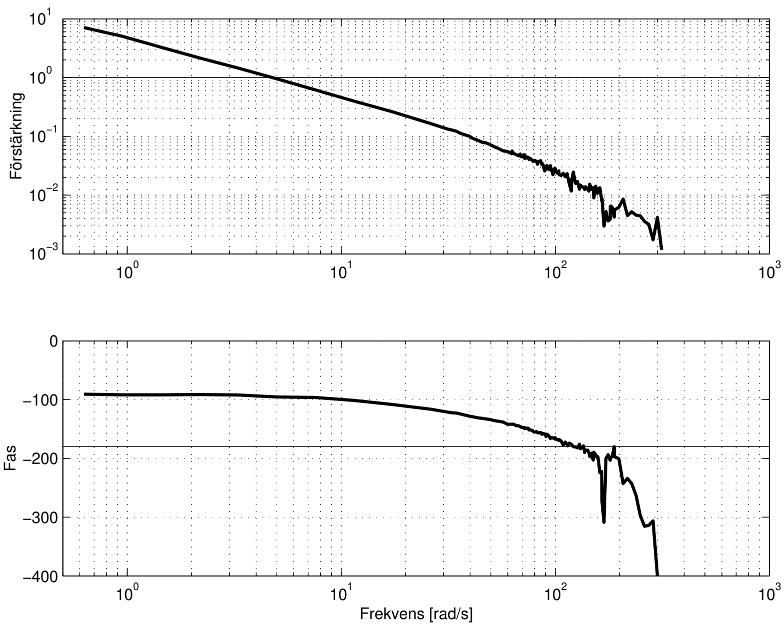
I figur 14.4 visas resultatet av en frekvensanalys gjord på bommen. Bodediagrammet visar att processen för låga frekvenser har en dynamik som väl kan approximeras med en integrator, det vill säga att överföringsfunktionen

$$G_\varphi(s) = \frac{k_\varphi}{s}$$

är en bra modell av processen. Man kan också se att $|G_\varphi(i\omega)| = 1$ för $\omega \approx 4.5$, vilket alltså ger oss förstärkningen $k_\varphi \approx 4.5$. Överföringsfunktionen G_φ blir alltså

$$G_\varphi(s) = \frac{4.5}{s}$$

Bodediagrammet visar också att denna enkla modell bara gäller för låga frekvenser. För höga frekvenser börjar annan dynamik påverka systemet. För frekvenser upp till $\omega \approx 10$ rad/s överensstämmer förstärkningskurvan väl med modellen och faskurvan har minskat från modellens $-90°$ till ca $-100°$. Det är mycket viktigt att hålla reda på modellens giltighetsområde. Om det längre fram visar sig att vi vill arbeta i det högre frekvensområdet måste vi ta fram en högre ordningens modell som beskriver processen även för dessa frekvenser.



Figur 14.4 Bodediagrammet för vinkelprocessen

Dynamiken mellan vinkeln och kulans läge

Sambandet mellan kulans läge z på bommen och bommens vinkel φ kan man beräkna med hjälp av mekanikens lagar. När bommen lutar bildas ett vridmoment som gör att kulan rullar. Detta illustreras i figur 14.5. Kulan påverkas också av en centrifugalkraft, men den försummas i fortsättningen. Kulans moment runt kontaktpunkten på bommen ges av

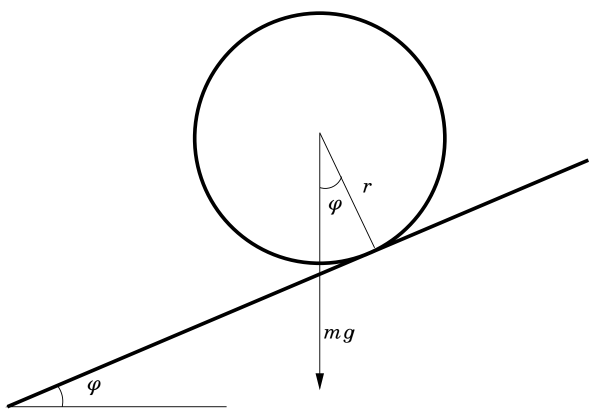
$$M = mgr \sin \varphi$$

där m är kulans massa och r dess radie. Kulans tröghetsmoment med avseende på kontaktpunkten fås ur tabellverk till

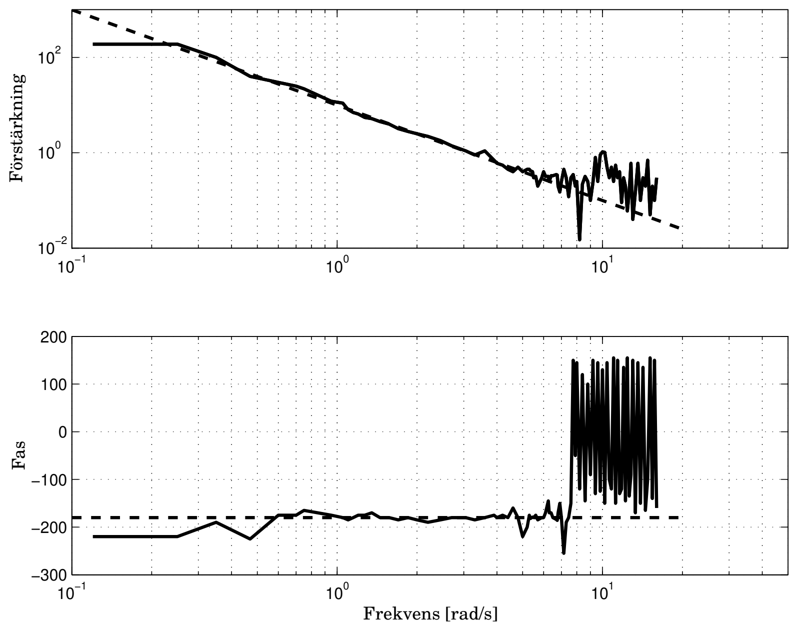
$$J = \frac{7mr^2}{5}$$

Ur momentekvationen

$$M = J\dot{\omega}$$



Figur 14.5 Kulan på bommen



Figur 14.6 Bodediagrammet för positionsprocessen. De streckade kurvorna svarar mot modellen $G_z = 10/s^2$.

kan vi nu beräkna kulans vinkelacceleration till

$$\dot{\omega} = \frac{M}{J} = \frac{5g \sin \varphi}{7r}$$

Denna ekvation ger sambandet mellan φ och ω, men vi är intresserade av sambandet mellan φ och z. Eftersom

$$\dot{z} = r\omega$$

ges sambandet av

$$\ddot{z} = r\dot{\omega} = \frac{5g \sin \varphi}{7} \approx 7 \sin \varphi \approx 7\varphi$$

Den sista approximationen förutsätter små vinkeländringar.

Ur mekanikens lagar har vi alltså kommit fram till överföringsfunktionen

$$G_z = \frac{7}{s^2}$$

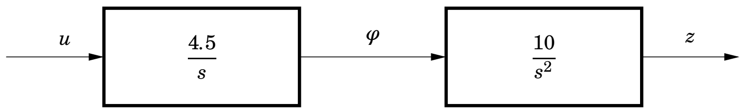
det vill säga en dubbelintegrator med förstärkningen 7. Denna överföringsfunktion beskriver sambandet mellan vinkeln φ mätt i radianer och läget z mätt i meter. Det vi saknar i överföringsfunktionen är givarens omräkningsfaktorer som ger oss signalerna mätta i volt. Figur 14.6 visar resultatet av en frekvensanalys gjord på bommen. Bodediagrammet bekräftar att dubbelintegratorn är en bra modell av processen. Förstärkningen kan vi beräkna genom att till exempel notera att förstärkningen är ett ungeför vid frekvensen $\omega = 3.2$. Det innebär att

$$|G_z(3.2i)| = \frac{k_z}{3.2^2} \approx \frac{k_z}{10} = 1$$

vilket innebär att förstärkningen är ungefär 10. Överföringsfunktionen blir alltså

$$G_z = \frac{10}{s^2}$$

Figuren visar att modellen stämmer bra för frekvenser upp till $\omega \approx 5$ rad/s. Över denna frekvens försämras modellen drastiskt.



Figur 14.7 Blockschemabeskrivning av bomprocessen

Ett problem som modellen inte täcker är att kulan hoppar vid alltför snabba vinkeländringar, speciellt då den ligger långt ut på bommen. Modellen har inte heller tagit hänsyn till den centrifugalkraft som verkar på kulan då bommen rör sig.

Sammanfattning

Den modell vi tagit fram för processen visas i blockschemat i figur 14.7.

Den första delöverföringsfunktionen, G_φ, är giltig för frekvenser upp till $\omega \approx 10$ rad/s, medan den andra, G_z, bara gäller upp till $\omega \approx 5$ rad/s.

14.2 Analys

Den process vi ska reglera har vi nu modellerat och den beskrivs i figur 14.7. Den totala överföringsfunktionen mellan styrsignalen u och kulans läge z ges av

$$G_P = G_z G_\varphi = \frac{45}{s^3}$$

Processen är med andra ord en trippelintegrator och instabil. Dess Bodediagram har en förstärkningskurva med lutningen -3 och en faskurva med den konstanta fasen $-270°$ för låga frekvenser.

Vi har gått igenom flera olika reglerstrategier i kursen, och vi ska nu diskutera några alternativ vi har för att reglera kulan på bommen.

Kan man reglera processen med en PID-regulator? Svaret är nej. Eftersom processen har en fasvridning på $-270°$ krävs det mer än $90°$ fasökning i regulatorn för att få en fasmarginal och därmed stabilisera processen. PID-regulatorn kan teoretiskt ge en fasökning på högst $90°$ med hjälp av D-delen. Med filter på D-delen kommer man inte upp till $90°$.

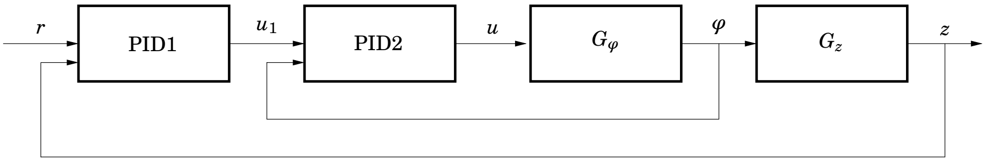
En möjlig lösning är att kombinera PID-regulatorn med en fasavancerande kompensering och på så sätt få en total fasökning som är större än $90°$. Eftersom vi har tillgång till två signaler kan man dock få bättre lösningar genom att utnyttja båda dessa. Ett sätt är att använda två PID-regulatorer som arbetar i en kaskadkoppling enligt figur 14.8. Med den inre PID-regulatorn, PID2, kan man flytta in integratorn i G_φ i vänstra halvplanet. Detta innebär samtidigt att fasen för låga frekvenser ökar från $-90°$ till $0°$.

Den yttre PID-regulatorn, PID1, har nu inte längre processen G_P att reglera, utan har fått en process med bara två integratorer och en fasvridning på $-180°$ vid låga frekvenser. Denna process går utmärkt att reglera med en PID-regulator.

Ett annat angreppssätt för regleringen är att utföra regulatorberäkningarna i frekvensplanet med kompenseringslänkar. Den fasavancerande länken vi studerat i kursen kan inte ensam stabilisera processen G_P. Däremot kan man efter en kaskadkoppling med regulatorn PID2 bestämma en kompenseringslänk i stället för PID-regulatorn PID1.

Ett tredje angreppssätt är att använda tillståndsåterkoppling. Eftersom processen är av tredje ordningen krävs det tre tillstånd att återkoppla ifrån. Vi har bara tillgång till två tillstånd, men genom att använda ett Kalmanfilter kan vi skatta ett tredje tillstånd.

Vi väljer här att lösa regleringen med hjälp två kaskadkopplade PID-regulatorer enligt figur 14.8. När vi är färdiga kommer vi att studera lösningen och visa att den



Figur 14.8 Kaskadreglering av bomprocessen

regulator vi kommit fram till mycket väl hade kunnat bestämmas med hjälp av de andra metoderna.

14.3 Reglering

Vi har nu kommit fram till själva regulatorberäkningen. Vi kommer att dela upp den i två delar. Först bestämmer vi sekundärregulatorn PID2 i kaskadkonfigureringen i figur 14.8 så att vi får en bra reglering av bommens vinkel. Därefter bestämmer vi primärregulatorn PID1 så att vi får en bra reglering av kulans läge på bommen.

Vinkelregleringen

Vid vinkelregleringen ges processens överföringsfunktion av

$$G_\varphi = \frac{4.5}{s}$$

Vi ska reglera denna med en PID-regulator. Eftersom processen har så enkel dynamik nöjer vi oss med en P-regulator:

$$G_{R2} = K_2$$

Den slutna kretsens överföringsfunktion blir

$$G_2 = \frac{4.5K_2}{s + 4.5K_2} = \frac{1}{1 + sT_2}$$

där $T_2 = 1/(4.5K_2)$ är slutna systemets tidskonstant. Tack vare processens integrator blir stationära förstärkningen $G_2(0) = 1$. Det innebär att vi inte får något kvarstående reglerfel vid stegändringar i börvärdet. Eftersom vi inte heller har några laststörningar på denna delen av processen motiverar detta att vi inte behöver någon integraldel i regulatorn.

Teoretiskt kan man välja slutna systemets tidskonstant T_2 hur kort som helst utan att få stabilitetsproblem. Bodediagrammet i figur 14.4 visar dock att modellen är osäker för frekvenser över 10 rad/s. En skärfrekvens på 10 rad/s innebär att

$$|G_0(i\omega_c)| = |G_0(i \cdot 10)| = K_2 \frac{4.5}{10} = 1$$

det vill säga att

$$G_{R2} = K_2 = \frac{10}{4.5} \approx 2.2$$

Detta innebär att slutna systemets tidskonstant blir $T_2 = 1/(2.2 \cdot 4.5) \approx 0.10$ s. Denna snabbhet är fullt tillräcklig och ger ingen större begränsning för den fortsatta regleringen av kulan på bommen.

Kulregleringen

Vi övergår nu till primärregulatorn. Tack vare kaskadkopplingen och sekundärregulatorn har processen G_P med tre integratorer förenklats till processen

$$G_{P1} = \frac{1}{1+0.1s} \cdot \frac{10}{s^2}$$

Denna har fasen $-180°$ vid låga frekvenser och med hjälp av D-delen i PID-regulatorn kan vi få den stabil. Det finns många sätt att bestämma parametrarna i regulatorn. Eftersom processen är av tredje ordningen kan vi inte placera polerna godtyckligt. Vi väljer därför att bestämma regulatorparametrarna med hjälp av Bodediagrammet. Designen blir enklare att genomföra om vi antar att regulatorn är på serieformen

$$G'_{R1} = K'\left(1 + \frac{1}{sT'_i}\right)\frac{1+sT'_d}{1+sT'_d/10}$$

Av ekvationen framgår att regulatorn har ett filter på derivatadelen med tidskonstanten $T'_d/10$.

Om vi jämför ekvationen för G'_{R1} med kompenseringslänkarna vi studerade i Föreläsning 11 ser vi att regulatorn är en produkt av en fasretarderande och en fasavancerande länk. Den fasretarderande länken ges av

$$1 + \frac{1}{sT'_i} = \frac{sT'_i+1}{sT'_i} = \frac{s+1/T'_i}{s} = \frac{s+a}{s+a/M}$$

där $a = 1/T'_i$ och $M \to \infty$. Den fasavancerande länken ges av

$$K'\frac{1+sT'_d}{1+sT'_d/10} = K'\frac{1+s/b}{1+s/(bN)}$$

där $b = 1/T'_d$ och $N = 10$.

Vi kan nu bestämma regulatorparametrarna med de metoder vi lärde oss i Föreläsning 11. Genom att bestämma parametrarna för den fasavancerande länken bestämmer vi derivatatiden T'_d och förstärkningen K'. Därefter bestämmer vi integraltiden T'_i ur parametern a i den fasretarderande länken.

Fasavancerande kompensering Det första steget vid fasavancerande kompensering är att ange specifikationer på skärfrekvensen och fasmarginalen. I detta fallet är det inte så lätt att hitta rimliga specifikationer, eftersom processen har så stor fasvridning. Fasen för G_{P1} går från $-180°$ vid låga frekvenser till $-270°$ vid höga frekvenser.

Antag att vi vill ha en fasmarginal som är $\varphi_m = 40°$. Det betyder att kompenseringslänken måste höja fasen mer än $40°$. Om vi väljer $N = 10$ visar figur 11.11 att den fasavancerand länken ger en fasavancering på $55°$ vid skärfrekvensen. Med tumregeln $a = 0.1\omega_c$ ger den fasretarderande länken en fasminskning på $-6°$ vid skärfrekvensen. Totalt kan vi alltså öka fasen med $49°$ och vi kan välja en skärfrekvens där processen ger en fasvridning som är $-189°$, det vill säga

$$\arg G_{P1}(i\omega_c) = -180° - \arctan(0.10\omega_c) = -189°$$

Detta ger att skärfrekvensen blir $\omega_c \approx 2$ rad/s.

Efter att ha valt ω_c kan vi nu bestämma T'_d och K' enligt metoden som beskrevs i Föreläsning 11. Derivatatiden T'_d bestäms först så att maximal fasavancering sker vid skärfrekvensen.

$$b\sqrt{N} = \omega_c \Rightarrow T'_d = \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{N}}{\omega_c} = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1.6$$

Därefter bestäms K' så att ω_c verkligen blir skärfrekvensen, det vill säga så att kretsöverföringsfunktionen har beloppet ett vid ω_c. Det ger oss ekvationen

$$|G'_{R1}(i\omega_c)G_{P1}(i\omega_c)| \approx K'\sqrt{N} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\omega_c^2 0.1^2}} \cdot \frac{10}{\omega_c^2} = 1$$

där vi utnyttjat kunskapen att kompenseringslänken har beloppet $K'\sqrt{N}$ vid skärfrekvensen från Föreläsning 11. Vi har också försummat den fasretarderande komponenten eftersom den har en förstärkning nära ett vid skärfrekvensen. Ekvationen ger oss nu förstärkningen

$$K' = \frac{\omega_c^2\sqrt{1+\omega_c^2 0.1^2}}{10\sqrt{10}} = \frac{2^2\sqrt{1+2^2 0.10^2}}{10\sqrt{10}} = 0.13$$

Fasretarderande kompensering Slutligen bestämmer vi integraltiden T_i' med samma tumregel som vi lärde oss i Föreläsning 11. Integraltiden väljs så att fasen vid skärfrekvensen inte minskar med mer än 6°. Det ger oss ekvationen

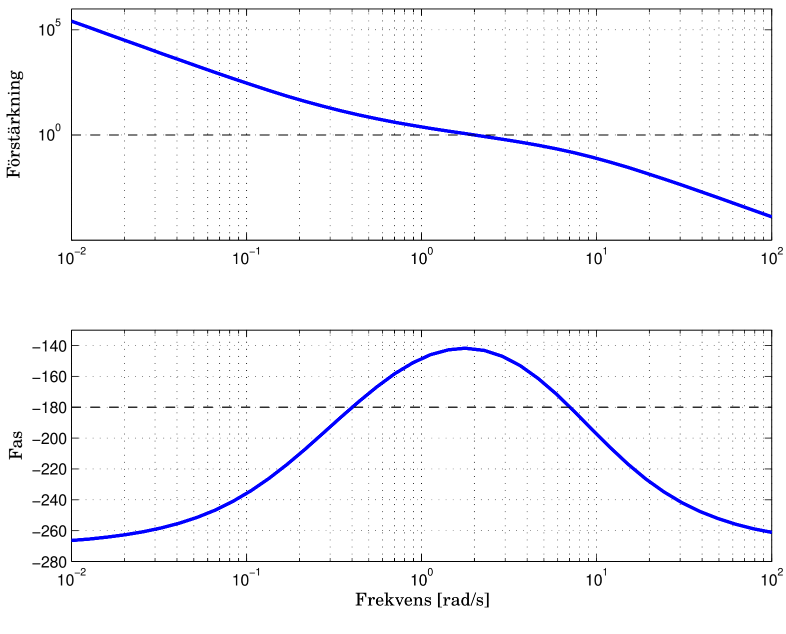
$$a = 0.1\omega_c \Rightarrow T_i' = \frac{1}{a} = \frac{1}{0.1\omega_c} = \frac{1}{0.1\cdot 2} = 5.0$$

Resultat Vi har nu bestämt regulatorparametrarna i de två regulatorerna som ingår i kaskadregleringen. Parametrarna är

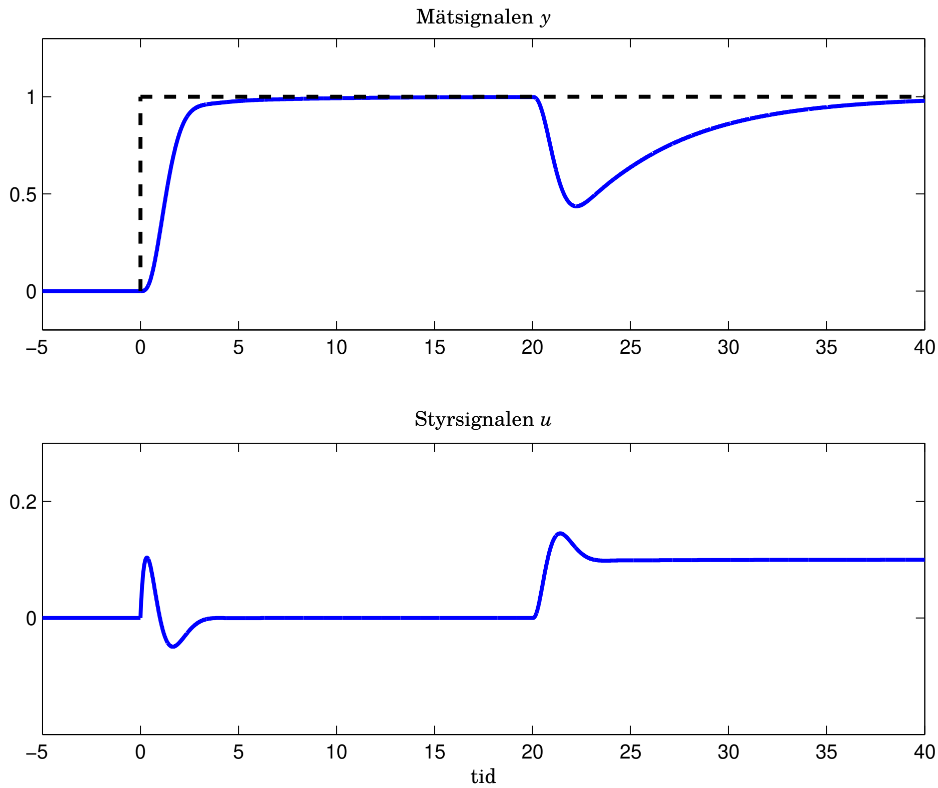
$$\begin{array}{llll} G_{R1}: & K' = 0.13 & T_i' = 5.0 & T_d' = 1.6 \\ G_{R2}: & K_2 = 2.2 & & \end{array}$$

I figur 14.9 visas Bodediagrammet för kretsöverföringsfunktionen $G_{R1}G_{P1}$. Figuren visar att vi uppnått den önskade skärfrekvensen $\omega_c = 2$ rad/s och den önskade fasmarginalen $\varphi_m = 38°$.

I figur 14.10 visas resultatet av en simulering av bomprocessen med de beräknade regulatorerna. Figuren visar först svaret på en stegändring i börvärdet. Vid tidpunkten $t = 20$ störs regleringen av en laststörning. Laststörningen svarar mot att man plötsligt börjar trycka på kulan.



Figur 14.9 Bodediagrammet för kretsöverföringsfunktionen $G_{R1}G_{P1}$



Figur 14.10 Resultat av simulering av bomprocessen. Den övre kurvan visar kulans läge vid stegändringar i börvärdet och lasten. Den undre kurvan visar styrsignalen

Bodediagrammet och simuleringen visar att regulatorberäkningen är rimlig. Den verkliga processen innehåller olinjäriteter och omodellerad dynamik och den verkliga regulatorn innehåller fördröjningar och filter som vi inte tagit med i beräkningen. Detta innebär att vi kan förvänta oss avvikelser från simuleringen. Experiment visar dock att dessa avvikelser är små och att den beräknade regulatorn fungerar bra.

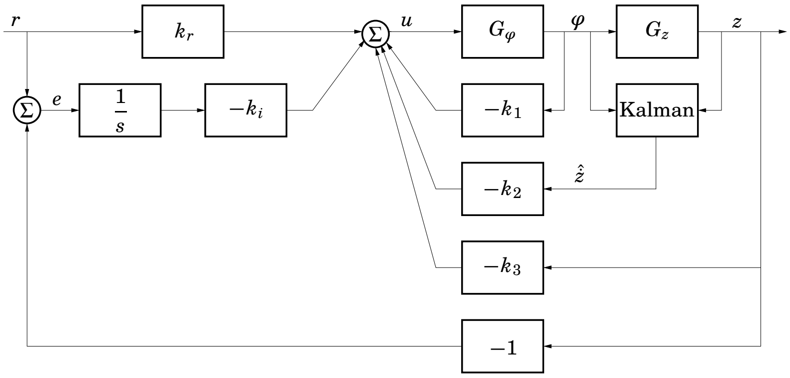
Andra angreppssätt

Vi har nu löst reglerproblemet och valde att göra det med hjälp av två kaskadkopplade PID-regulatorer. Som nämnts tidigare hade vi även kunnat använda andra angreppssätt. Vi ska här avsluta med att undersöka den regulator vi erhållit och visa att den mycket väl hade kunnat vara resultatet av andra beräkningsmetoder.

Den reglerstrategi vi tagit fram hade lika gärna kunnat vara resultatet av en tillståndsåterkoppling kombinerat med ett Kalmanfilter. Detta illustreras i figur 14.11. Blockschemat visar en tillståndsåterkoppling med integration där kulans hastighet på bommen, $\dot{z}$, beräknas med hjälp av ett Kalmanfilter. Om man bortser från filtret på derivatadelen i PID-regulatorn, kan man visa att regleringen i figur 14.11 är identisk med de två kaskadkopplade PID-regulatorerna om man gör följande val av parametrar

$$k_1 = K_2 \qquad k_2 = KK_2T_d \qquad k_3 = KK_2$$
$$k_r = KK_2b \qquad k_i = -\frac{KK_2}{T_i}$$

där vi valt att skriva om G_{R1} på parallellform. Den enda skillnaden är att kulans hastighet i PID-regulatorn skattas genom att mätsignalen deriveras, medan den i figur 14.11 skattas med hjälp av ett Kalmanfilter.



Figur 14.11 Kaskadreglering av bomprocessen tolkad som tillståndsåterkoppling och Kalman-filtrering

PID-regulatorernas parametrar hade vi kunnat ta fram genom polplacering, även om vi inte hade kunnat placera polerna godtyckligt i den yttre kretsen. Vi hade även kunnat använda andra inställningsmetoder för PID-regulatorer.

Med detta avslutande avsnitt har vi konstaterat att de olika metoder för att beräkna regulatorer som vi studerat mycket väl kan leda fram till samma regulator. Skillnaden mellan metoderna ligger alltså inte primärt i de resulterande regulatorer de ger, utan i sättet varpå de beräknas.

Sakregister