1.

a. Ett första ordningens system $\frac{b}{s+a}$ har stegsvar $y(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$. Vårt system är en summa av två sådana system.

$$\begin{aligned} y(t) &= 2(1 - e^{-t}) - (1 - e^{-3t}) \\ &= 1 - 2e^{-t} + e^{-3t} \end{aligned}$$

b.

$$G(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+3} = \frac{-s+3}{(s+1)(s+3)}$$

Polerna ges av $s = -1$ och $s = -3$. Nollställe finns i $s = 3$.

c. Det finnns flera olika möjliga tillståndsbeskrivningar, se formelsamlingen. Ett alternativ är att välja diagonalformen, eftersom det ursprungliga systemet är på lämplig form

$$G(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+3} = \frac{\beta_1\gamma_1}{s-\lambda_1} + \frac{\beta_2\gamma_2}{s-\lambda_2}$$

om vi väljer $\beta_1 = 1, \gamma_1 = 2, \lambda_1 = -1$ och $\beta_2 = 1, \gamma_2 = -3, \lambda_2 = -3$. Detta ger

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Alternativt kan observerbar eller styrbar kanonisk form användas, om vi i stället utgår från uttrycket i deluppgift b och identiferar koefficienter i

$$G(s) = \frac{-s+3}{(s+1)(s+3)} = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}.$$

2 a. Det slutna systemet från r till y blir

$$G_{cl}(s) = \frac{G_r G_p}{1 + G_r G_p} = \frac{\frac{K(s+1/T_i)}{s}\frac{1}{s-3}}{1 + \frac{K(s+1/T_i)}{s}\frac{1}{s-3}} = \frac{K(s+1/T_i)}{s^2 + s(K-3) + K/T_i}$$

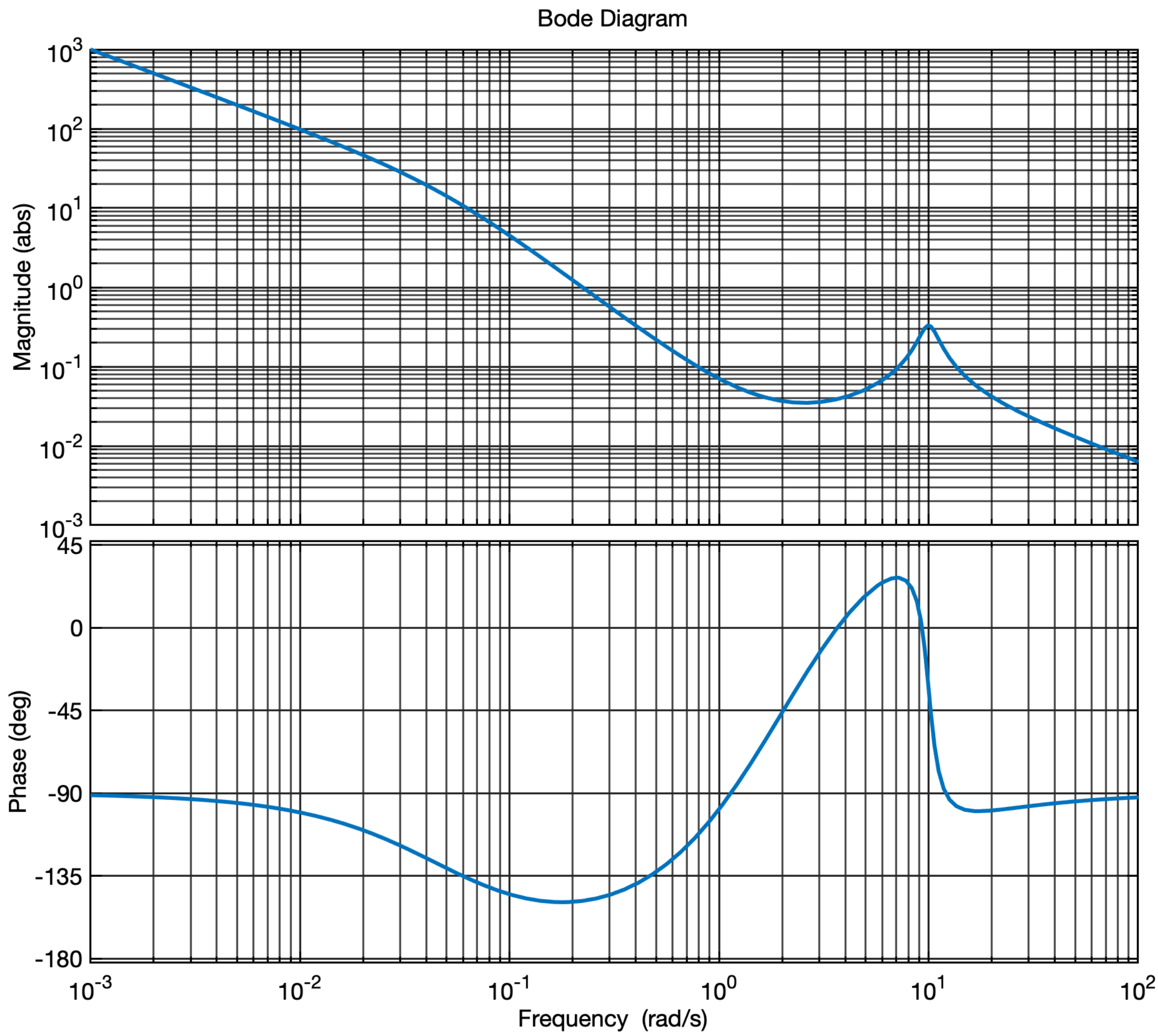
Ett andra ordningens system med polpolynom $p(s) = s^2 + a_1 s + a_2$ är asymptotiskt stabilt om och endast om $a_1 > 0$ och $a_2 > 0$. Om integraltiden $T_i > 0$ så är det slutna systemet asymptotiskt stabilt för alla PI-regulatorer med $K > 3$.

b. Överföringsfunktionen från v till reglerfelet $e = r - y$ är (då $r = 0$)

$$G_{ev}(s) = -\frac{G_p(s)}{1 + G_r(s)G_p(s)} = \frac{-s}{s^2 + s(K-3) + K/T_i}$$

Laplacetransformering av laststörningen ger $V(s) = \frac{1}{s^2}$. Under förutsättning att PI-regulatorn valts så att systemet är asymptotiskt stabilt kan slutvärdesteoremet användas och det stationära felet ges då av

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sG_{ev}(s)\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{-s^2}{s^2 + s(K-3) + K/T_i}\frac{1}{s^2} \\ &= -\frac{T_i}{K} \end{aligned}$$



Figur 1 Bodediagram i uppgift **??**.

3.

a. För frekvensen $\omega = 0.1$ avläser vi $|G(i\omega)| \approx 4.5$ och $\arg G(i\omega) \approx -145° \approx -2.5$ rad, vilket ger $y(t) \approx 4.5 \sin(0.1t - 2.5)$.

b. Med $K = 0.1$ får vi en skärfrekvens då $0.1|G(i\omega_c) = 1$, dvs $|G(i\omega_c) = 10$, vilket enligt Bodediagrammet ger $\omega_c = 0.06$. Vid denna frekvens är fasen $\arg G(i0.06) \approx -135°$ vilket ger fasmarginal

$$\phi_m = 180° + \arg G(i0.06) \approx 180° - 135° = 45°.$$

c. Eftersom fasen aldrig sjunker under -180 grader så får vi med P-reglering ett återkopplat system som är asymptotiskt stabilt för alla förstärkningar $K > 0$. Det uppstår alltså aldrig självsvängning när man höjer förstärkningen, vilket självsvängningsmetoden är baserad på.

4.

a. Styrbarhetsmatrisen är

$$W_s = [\,B \quad AB\,] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vilket har full rang (determinanten är 1). Systemet är därför styrbart.

b. Observerbarhetsmatrisen är

$$W_s = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

vilket har full rang (determinanten är -1). Systemet är därför oserverbart.

c. Slutna systemet ges av

$$Y = C(sI - (A - BK))^{-1} B k_r R.$$

och polerna till det slutna systemet ges av lösningarna till

$$0 = \det(sI - A + BK) = \det\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \begin{vmatrix} s + k_1 + 1 & k_2 \\ -1 & s + 1 \end{vmatrix} = s^2 + s(k_1 + 2) + (k_1 + k_2 + 1).$$

Matchning av koefficienter med det önskade polpolynomet

$$p(s) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$$

ger

$$\begin{cases} s^2: & 1 = 1, \\ s^1: & k_1 + 2 = 3 \Leftrightarrow k_1 = 1, \\ s^0: & k_1 + k_2 + 1 = 2 \Leftrightarrow k_2 = 0. \end{cases}$$

I stationaritet ges det slutna systemet av

$$0 = \dot{x} = (A - BK)x + Bk_r r \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} k_r r,$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 = -2x_1 + k_r r, \\ 0 = x_1 - x_2, \\ y = x_2. \end{cases}$$

Eftersom vi inte vill ha något stationärt fel så får vi även villkoret $r = y$, vilket ger oss $k_r = 2$. Den sökta styrlagen är alltså

$$u = -x_1 + 2r.$$

Notera att det även är möjligt att finna k_r genom att sätta $s = 0$ i ekvationen

$$C(sI - (A - BK))^{-1}Bk_r = 1.$$

5. G_1 innehåller en tidsfördröjning på 1 sekund, detta motsvarar figur B.

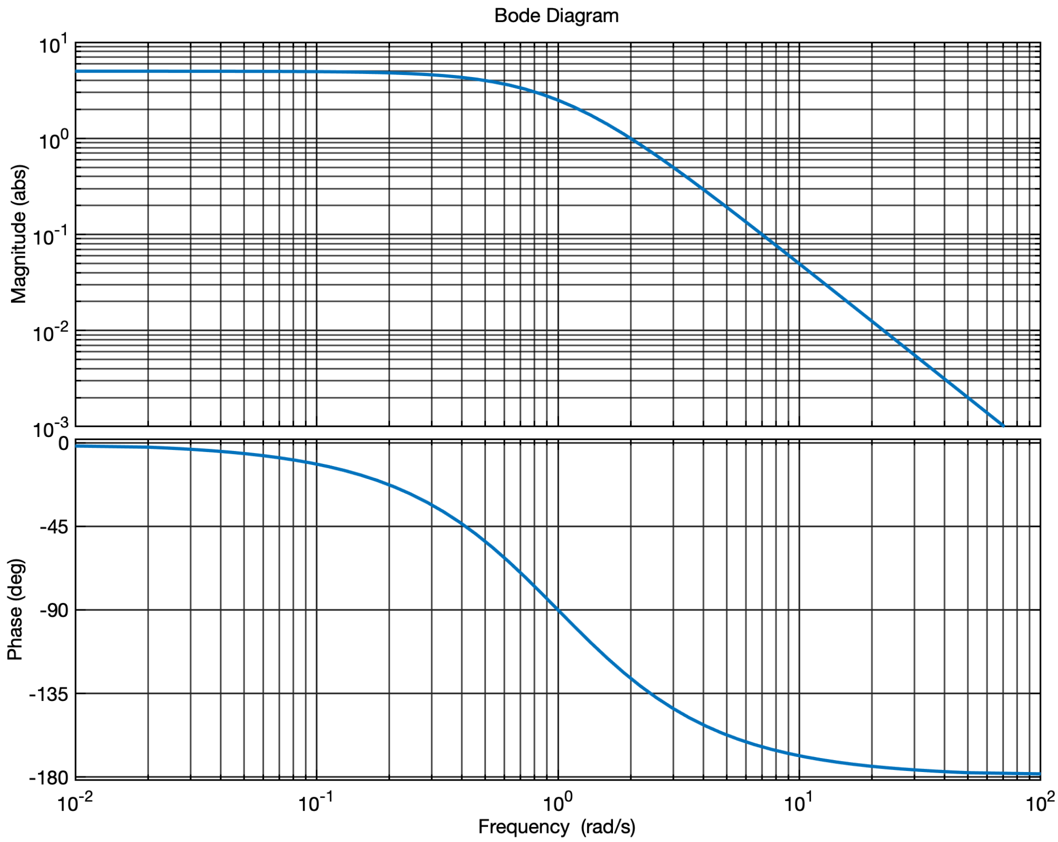
G_2 har poler i vänster halvplan och hör till ett as. stabilt system, men har ett nollställe i höger halvplan, vilket leder till negativt derivata i början på stegsvaret: Initialvärdesteoremet ger $\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} sG(s) = -1$. Därför hör G_2 ihop med figur D.

G_3 har poler på imaginära axeln, och är därför på stabilitetsgränsen. Det kommer ge ett oscillerande odämpat stegsvar. Detta svarar mot figur A. Enligt formelsamlingen, se fall 28 i Laplacetabellen, är stegsvaret $y(t) = 0.5 - 0.5\cos(2t)$.

G_4 (också fall 28 i Laplacetabellen) är ett andraordningens system med slutvärde $G_4(0) = 1$ och dämpning $\zeta = 0.5$. Det stämmer med figur F.

Figur C och E saknar motsvarigheter.

Svar: 1234 = BDAF, alternativt ABCDEF = 31X2X4



Figur 2 Bodediagram i uppgift **??**.

6.

a. Hon ska välja en fasavancerande länk.

b. Den tidigare skärfrekvensen läses av i Bode diagrammet där amplitudkurvan skär 1. Detta sker vid 2 rad/s. Hon bör därför välja ny skärfrekvens $\omega_c = 5 \cdot 2 = 10$ rad/s.

c. Eftersom vi ska ha $|KG(i\omega_c)| = 1$ får vi

$$K = \frac{1}{|G(i10)|} = \frac{1}{0.05} = 20$$

d. P-regulatorn som Truls föreslår kommer inte ändra faskurvan. Därför kommer fasmarginalen bli väldigt dålig: Eftersom fasen är runt -170 grader vid 10 rad/s så kommer fasmarginalen bli enbart 10 grader, vilket är för dåligt jämfört med rekommendationerna. Systemet kommer då vara nära instabilitet och det kommer vara känsligt för modellfel såsom små variationer i förstärkning eller existens av små tidsfördröjningar.

Kommentar: Att säga att $K = 20$ är en hög förstärkning och leder till nackdelar såsom mättning och stor förstärkning av mätbrus är inte en lika bra förklaring i detta fall. Alla regulatorer som höjer bandbredden till 10 rad/s kommer kräva samma förstärkning, även den som använder fasavancerande länk.

e. Eftersom fasen för ett system av den formen sjunker från 0 till -180 grader och har kommit halvvägs precis vid brytfrekvensen $\omega = a$, så kan vi läsa av a från det värde där faskurvan skär -90 grader. Detta ger $a = 1$. Statisk förstärkning för systemet är $G(0) = b/a^2 = b$. Avläsning av amplituden vid låga frekvenser i Bodediagrammet ger $b = \lim_{\omega\to 0} |G(i\omega)| = 5$. Svar: $G(s) = 5/(s+1)^2$

f. Vid den nya skärfrekvensen $\omega_c = 10$rad/s har vi fas $G(i\omega_c) \approx -170°$ enligt Bodediagrammet. Alternativt kan vi använda modellen från förra deluppgiften för att beräkna

$$\arg G(i\omega_c) = arg \frac{5}{(i\omega_c + 1)^2} = -2 \arctan \omega_c = -2 \arctan 10 = -2.94 \text{ rad}$$

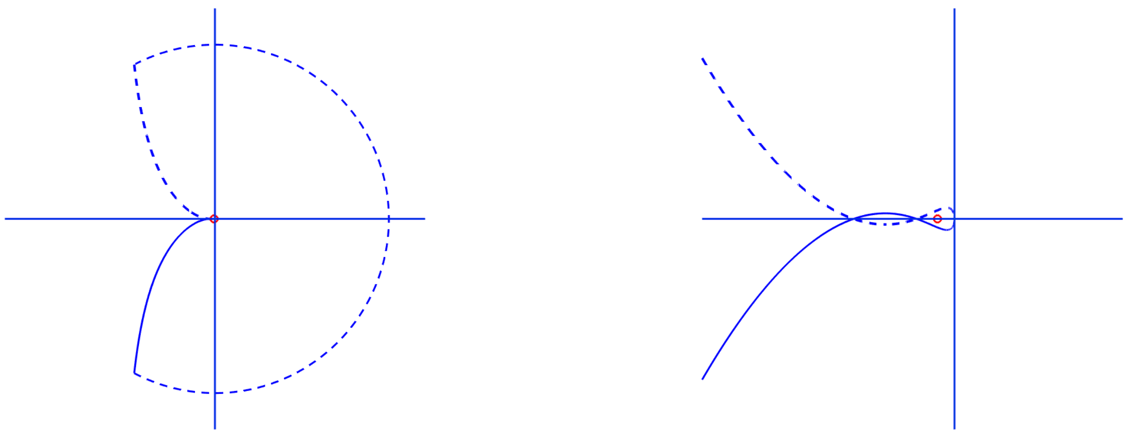
vilket i grader blir $-180/\pi \cdot 2.94 = -169°$, vilket bara ger 11 graders fasmarginal. Vi behöver därför 45-11=34 graders fasavancering. Enligt diagram i formelsamlingen kan detta åstadkommas med en fasavancerande länk med $N \approx 3.5$.

Designprincipen att lägga fasavanceringstoppen vid skärfrekvensen ger ekvationen $b\sqrt{N} = \omega_c$ vilket ger

$$b = \frac{\omega_c}{\sqrt{N}} = \frac{10}{\sqrt{3.5}} = 5.3$$

Slutligen konstaterade vi i deluppgift c att regulatorn behöver öka förstärkningen vid skärfrekvensen med en faktor 20. Detta ger ekvationen $K_k\sqrt{N} = 20$, vilket ger $K_k = 20/\sqrt{3.5} = 10.7$. Den fasavancerande regulatorn blir

$$G_K(s) = K_k N \frac{s+b}{s+bN} = 37 \frac{s+5.3}{s+19}$$



Figur 3 Nyquistkurvan i uppgift **??**.

7.

a.

$$G_0(i\omega) = \frac{(6+i\omega)^2}{i\omega(1+i\omega)^2} = \frac{-i(6+i\omega)^2(1-i\omega)^2}{\omega(1+\omega^2)^2}$$

Skärningen med reella axeln sker därför när realdelen är noll för uttrycket

$$(6+i\omega)^2(1-i\omega)^2 = \omega^4 - 10i\omega^3 - 13\,\omega^2 - 60i\omega + 36$$

Ledtråden ger att $\omega = \pm 2$ och $\omega = \pm 3$.

För dessa frekvenser, där realdelen är noll, förenklas uttrycket för kvoten ovan till

$$G_0(i\omega) = \frac{-10\omega^3 - 60\omega}{\omega(1+\omega^2)^2} = -10\frac{\omega^2+6}{(1+\omega^2)^2}$$

vilket ger skärningarna $G_0(i2) = -4$ och $G_0(i3) = -3/2$

b. Systemet är stabilt om a) punkten -1/K ligger till vänster om -4, dvs K<1/4 eller b) punkten -1/K ligger till höger om -3/2, dvs K>2/3.
Svar: $0 < K < 1/4$ eller $K > 2/3$.

Om skärningspunkterna antas vara -5 och -2 fås i stället
Svar: $0 < K < 1/5$ eller $K > 1/2$.