LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 14 mars 2024 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematisk tabellsamling (TEFYMA eller motsvarande), institutionens formelsamling i reglerteknik, samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet rapporteras via Ladok. Facit kommer vara tillgängligt via Canvas. Tid och plats för tentavisning meddelas via Canvas.

1. Ett system ges av $Y(s) = G(s)U(s)$ med

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+3}$$

a. Beräkna systemets poler och nollställen och sätt ut dessa i ett singularitets-diagram (1.5 p)

b. Är systemet asymptotiskt stabilt, stabilt eller instabilt ? (0.5 p)

c. Beräkna systemet stegsvar $y(t)$, (dvs då insignal är $u(t) = \theta(t)$). (1 p)

d. Bestäm en differentialekvation på formen (ange a och b koefficienterna)

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

som beskriver systemet ovan för allmän insignal $u(t)$. (1 p)

Solution

a.

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+3} = \frac{3s+5}{(s+1)(s+3)}$$

Polerna ges av $s = -1$ och $s = -3$. Nollställe finns i $s = -5/3$.

b. Polerna ligger i öppna vänstra halvplanet. Systemet är därför asymptotiskt stabilt.

c. Ett första ordningens system $\frac{b}{s+a}$ har stegsvar $y(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$. Vårt system är en summa av två sådana system. Vi får

$$y(t) = 1 - e^{-t} + \frac{2}{3}(1 - e^{-3t}) = \frac{5}{3} - e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-3t}$$

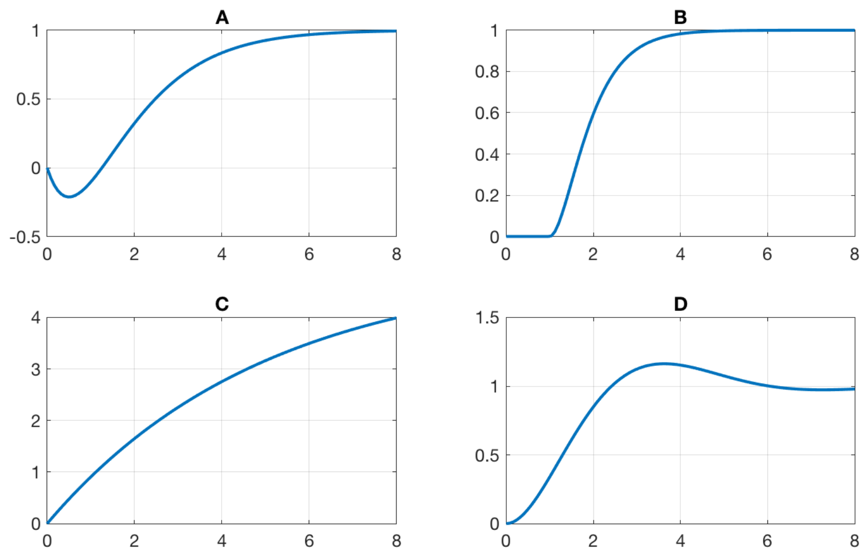
d. Eftersom $Y(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+3}U(s)$ så är $(s^2 + 4s + 3)Y(s) = (3s + 5)U(s)$, dvs

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = 3\dot{u}(t) + 5u(t).$$

2. Para ihop stegsvaren A till D i figur 1 med överföringsfunktionerna G_1 till G_5 (en blir över). Glöm inte motivera svaret. (2 p)

$$G_1(s) = \frac{1}{s+0.2}, \qquad G_2(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}, \qquad G_3(s) = \frac{4e^{-s}}{(s+2)^2}$$

$$G_4(s) = \frac{1}{s^2+s+1}, \qquad G_5(s) = \frac{1}{5s+1}$$



Figur 1 Stegsvar i uppgift 2.

Solution

Alla systemen är asymptotiskt stabila. Stegsvaren har därför slutvärden som ges av $G_1(0) = 5$ respektive $G_2(0) = G_3(0) = G_4(0) = G_5(0) = 1$.

Överföringsfunktionerna $G_1 = \frac{1}{s+0.2} = \frac{5}{5s+1}$ och $G_5 = \frac{1}{5s+1}$ är båda första ordningens system med tidskonstant $T = 5$ sekunder. Vi ser att G_1 svarar mot figur C och att G_5 saknas.

G_2 har ett nollställe $s = 1$ i höger halvplan. Det svarar mot systemet vars stegsvar går i negativ riktning initialt, dvs figur A.

G_3 har en tidsfördröjning på 1 sekund, vilket svarar mot figur B.

G_4 är ett system av formen $\frac{\omega_0^2}{s^2+2s\zeta\omega+\omega_0^2}$ där vi identifierar att $\omega = 1$ och $\zeta = 0.5$. Det svarar mot systemet med en liten översläng, dvs figur D.

Svar: $A = G_2$, $B = G_3$, $C = G_1$, $D = G_4$ och G_5 saknas. (12345=CABDX)

3. Med hjälp av en stor elektromagnet vill man få en liten permanent magnet att sväva. Magnetens position i höjdled, y, modelleras med följande olinjära tillståndsmodell.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{d}{m}x_1 + \frac{ku}{mx_2} - g\\ \dot{x}_2 &= x_1\\ y &= x_2,\end{aligned}$$

där g är tyngdaccelerationen, u är styrströmmen till elektromagneten, m är den lilla magnetens massa, samt k och d är konstanter.

a. Visa att $(x_1, x_2, u) = (0, \frac{k\alpha}{mg}, \alpha)$ är en stationär punkt ($\alpha > 0$ är godtycklig). (0.5 p)

b. Linjärisera modellen runt den stationära punkten ovan då $\alpha = g$. (1.5 p)

Solution

a. Insättning i tillståndsmodellen ger

$$\dot{x}_1 = -\frac{d}{m}x_1 + \frac{ku}{mx_2} - g = -\frac{d}{m}0 + \frac{k\alpha}{m\frac{k\alpha}{mg}} - g = 0$$
$$\dot{x}_2 = x_1 = 0$$

Alla derivator är 0, alltså ger detta stationära punkter.

b. Identifiera f som

$$f(x_1, x_2, u) = \begin{bmatrix} -\frac{d}{m}x_1 + \frac{ku}{mx_2} - g \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Derivera f med avseende på alla variabler

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{m} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} -\frac{ku}{mx_2^2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{k}{mx_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sätt in dom stationära punkterna $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (0, \frac{k}{m}, g)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(0,\frac{k}{m},g)} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{m} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(0,\frac{k}{m},g)} = \begin{bmatrix} -\frac{mg^2}{k\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(0,\frac{k}{m},g)} = \begin{bmatrix} \frac{g}{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det linjäriserade systemet ges, i fallet då $\alpha = g$, alltså av

$$\Delta\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{mg}{k} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\Delta x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Delta u$$
$$\Delta y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\Delta x$$

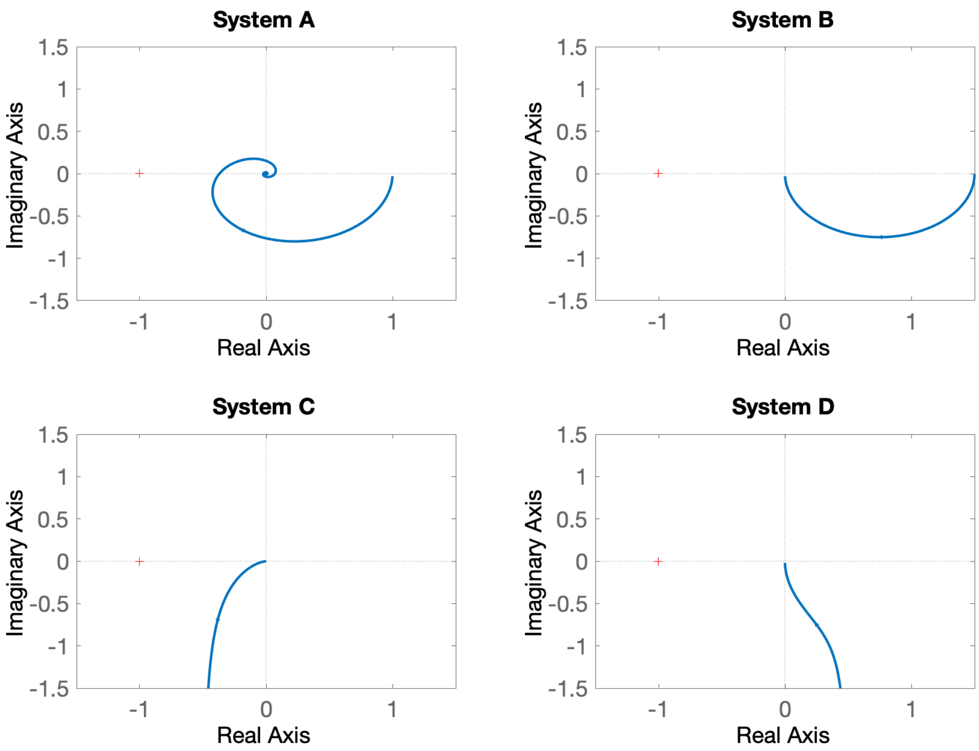
4. Nyquistdiagrammen A-D för fyra olika system visas i Figur 2. Systemen beskrivs av de fyra överföringsfunktionerna nedan. Para ihop diagrammen A-D med överföringsfunktionerna 1-4. Motivera svaren ! (2 p)

$$G_1(s) = \frac{3}{s+2}, \quad G_2(s) = \frac{2}{s(s+2)}, \quad G_3(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}, \quad G_4(s) = \frac{1+s}{s(1+s/2)}$$

Solution

Vi känner direkt igen system G_1 i system B, eftersom det är ett första ordningens system med stationär förstärkning $G_1(0) = 1.5$. Vi inser också att system A måste höra till system G_3, det är det enda system som har $G_3(0) = 1$ och i Nyquist-diagrammet kan man också skönja det typiska beteendet av en tidsfördröjning, vilket svarar mot faktor e^{-s}. För att skilja mellan de två återstående systemen, som båda har en integrator, så kan man kontrollera att G_2 har en fas under -90 grader (vilket motsvarar nyquistkurvan i C). Systemet G_4 har däremot en fas som ligger över -90 grader (man kan tolka G_4 som en integrator med en fasavancerande länk) och hör därför till system D.

Svar: 1234=BCAD.



Figur 2 Nyquist diagram A-D i problem 4.

5. En process

$$G_P(s) = \frac{1-s}{s^2+2s+2}$$

återkopplas enkelt med en proportionell P-regulator, dvs $Y(s) = G_P(s)U(s)$ och $U(s) = KE(s) = K(R(s) - Y(s))$.

a. Beräkna slutna systemets poler. För vilka konstanter $K > 0$ är slutna systemet asymptotiskt stabilt? (1 p)

b. Antag att vi gör en stegändring i referensvärdet. Vad kan du säga om stationärt fel, $\lim_{t\to\infty} e(t)$, för fallen då $K = 1$ och $K = 4$? (1 p)

Solution

a. Slutna systemets karakteristiska polynom ges av nämnaren i $\frac{KG_P(s)}{1+KG_P(s)}$. Detta ger karakteristisk ekvation.

$$s^2 + 2s + 2 + K(1-s) = s^2 + (2-K)s + 2 + K$$

Systemet är 2a ordningens och därför asymptotiskt stabilt om koefficienterna är positiva. Detta ger villkoret $K < 2$ (det stod i uppgiften att $K > 0$ så man behövde inte bry sig om negativa K).

Polerna ges av

$$s = \frac{-2+K \pm i\sqrt{4+8K-K^2}}{2}.$$

b. Felet ges av

$$E(s) = \frac{1}{1 + KG_p(s)} R(s)$$

Slutvärdesteoremet ger, med $R(s) = 1/s$,

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{1}{1 + KG_p(0)} = \frac{1}{1 + K\frac{1}{2}}$$

För $K = 1$ är slutna systemet asymptotiskt stabilt och slutvärdesteoremet kan användas. Vi får då $\lim_{t\to\infty} e(t) = 2/3$.

För $K = 4$ är slutna systemet instabilt (enligt analysen i deluppgift a) och slutvärde saknas. Slutvärdesteoremet går allltså inte att applicera i denna situation och skulle ge fel resultat.

6. Följande system ska styras

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

a. Visa att systemet är styrbart. (1 p)

b. Designa en tillståndsåterkoppling $u = -Kx$ sådan att polerna hamnar i $s = -2 \pm i$. (2 p)

c. Antag att vi har en mätgivare som mäter $y = [\,1 \quad -1\,]\, x$. Är systemet observerbart ? (1 p)

d. Om man konstruerar en observerare/Kalmanfilter

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

som skattar både x_1 och x_2 asymptotiskt korrekt och ska ge observerardynamik med karakteristiskt polynom $p(s) = (s + 2)(s + 1)$ så ger designekvationen att $L = 0$ (du behöver inte kontrollera detta). Tolka detta resultat ! (1 p)

Solution

a. Styrbarheten kan vi avgöra med hjälp av styrbarhetsmatrisen

$$W_s = (\, B \quad AB \,) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Systemet är styrbart om och endast om kolonnerna är linjärt oberoende, dvs. determinanten är skild från noll.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1(-2) = 1 \neq 0$$

Systemet är alltså styrbart.

b. Vi önskar nu välja ett K i styrlagen $u = -Kx$ så att slutna systemets poler hamnar i $s = -2 \pm i$. Polerna ges av egenvärdena till den nya systemmatrisen

$$A - BK = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-k_1 & -k_2 \\ -k_1 & -1-k_2 \end{pmatrix}$$

vilka fås ur det karakteristiska polynomet

$$\begin{aligned} \det(sI - (A-BK)) &= \begin{vmatrix} s+2+k_1 & k_2 \\ k_1 & s+1+k_2 \end{vmatrix} \\ &= (s+2+k_1)(s+1+k_2) - k_1 k_2 \\ &= s^2 + (3+k_1+k_2)s + 2 + k_1 + 2k_2 \end{aligned}$$

Vår önskan är att detta ska vara lika med

$$\det(sI - (A-BK)) = (s+2+i)(s+2-i) = s^2 + 4s + 5$$

så att polerna hamnar där vi vill. Identifiering av koefficienter ger att

$$\begin{aligned} 4 &= 3 + k_1 + k_2 \\ 5 &= 2 + k_1 + 2k_2 \end{aligned}$$

vilket leder till (subtrahera t.ex. den övre ekvationen från den undre)

$$\begin{aligned} k_1 &= -1 \\ k_2 &= 2 \end{aligned}$$

och $K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ är bestämd.

c. Vi har observerbarhetsmatris

$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

som har determinant skiljd från noll. Systemet är därför observerbart.

(Tolkning av uppgiften: Systemet kan uppkomma om man linjäriserar dynamiken för två tankar med olika utloppsarea, vilket leder till olika snabbhet för det två tankarna. Tankarna står bredvid varandra och har samma inflöde u. Om systemet motsvarar två olika snabba tankar som står bredvid varandra så kan man alltså genom att följa nivåskillnaden över tid med ett Kalmanfilter faktiskt få information om båda nivåerna, dvs nivåernas avvikelse från jämviktsläget, i den linjäriserade modellen. Detta är inte möjligt om de två tankarna har samma utloppsarea, dvs har samma dynamik.)

d. (Se avsnittet ”Tillståndsskattning genom simulering” i kompendiet.) Att designekvationen $\det(sI - A + LC) = p(s)$ ger $L = 0$ kan tolkas som att feldynamiken som efterfrågas faktiskt är precis samma som dynamiken för det givna systemet. Det innebär att en ren simulering av systemet, dvs att man kör modellen

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu, \qquad \hat{x}(0) = 0$$

kan användas, dvs ingen felåterkoppling behövs.

(Extra kommentar: Om man är nöjd med att skattningsfelet $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ dör ut med samma snabbhet som dynamiken i det öppna systemet har, så behöver man alltså faktiskt inte använda några mätningar $y(t)$ i Kalmanfiltret. Man kommer att få $\hat{x}(t) \to x(t)$ då $t \to \infty$, dvs korrekt skattning av av alla tillstånd (i alla fall så länge man inte har några omodellerade störningar i systemet och modellen verkligen stämmer.)

En annan (sido-) kommentar är att detta val på kalmanfiltrets dynamik inte riktigt uppfyller tumreglerna vi brukar ha om vi antar att kalmanfiltret ska användas tillsammans med inställningen in deluppgift b. Man brukar ju vilja att kalmanfiltret ska vara snabbare (kanske dubbelt så snabbt till exempel) som valet av slutna systemets poler.

7. Du vill reglera en process med överföringsfunktion

$$G_P(s) = \frac{10}{s^2}$$

så att systemet får skärfrekvens $\omega_c = 10$ rad/s och fasmarginal 30 grader. Designa en lämplig kompenseringslänk $G_R(s)$ som åstadkommer detta. Skissa också det resulterande Bode-diagrammet (dvs för $G_R(s)G_P(s)$). (3 p)

Solution

Vi väljer en fasavancerande länk

$$G_R(s) = K_k \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)}$$

Eftersom G_P har fas -180 grader för alla frekvenser måste vi höja fasen med 30 grader. Från figur i formelsamlingen ser vi att detta ger att $N = 3$. För att få mest fasavancering vid ω_c skall vi ha $\omega_c = b\sqrt{N}$, vilket ger $b = 10/\sqrt{3} = 5.77$. Slutligen får vi från villkoret $|G_P(i\omega_c)G_R(i\omega_c)| = 1$ att $10/10^2 K_k \sqrt{N} = 1$ vilket ger $K_k = 5.77$. Regulatorn blir

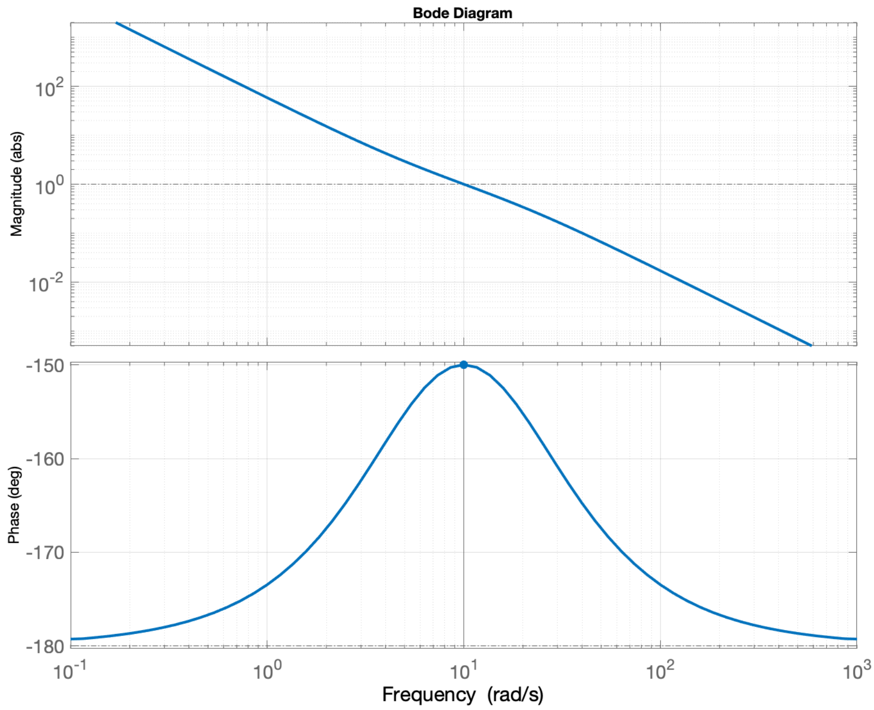
$$G_R(s) = 5.77\frac{1 + s/5.77}{1 + s/17.3} = \frac{100s + 577}{5.77s + 100}$$

Figuren nedan visar Bodediagrammet för det kompenserade systemet $G_R G_P$.

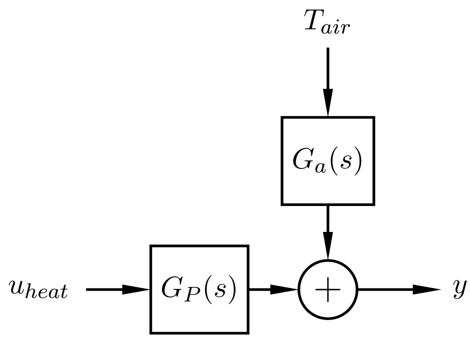
8. Det så kallade ”fasreferens-systemet” fyller en viktig funktion på ESS. Det består av ett cirka 500 meter långt rör som distribuerar en radiosignal som står för synkroniseringen av alla delar av anläggningen, med en noggrannhet på piko-sekundnivå. Eftersom även små temperaturvariationer kan störa noggrannheten måste röret temperaturregleras noga. Temperaturregleringen sköts av ett reglersystem (designat på vår institution) som styr en värmesignal u_{heat}. Målet är att hålla temperaturen y på konstant referenstemperatur, säg $r = 35°C$. Omgivande lufttemperatur, T_{air}, kan variera vilket stör systemet.

Ett förenklat blockschema av systemet visas i Figur 4. Genom experiment på ett prototypsystem, se figur 5, har följande dynamik bestämts

$$G_P(s) = \frac{K_p}{sT_p + 1}, \qquad G_a(s) = \frac{e^{-sL}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$



Figur 3 Bodediagram för det kompenserade systemet $G_R G_P$ i uppgift 7.



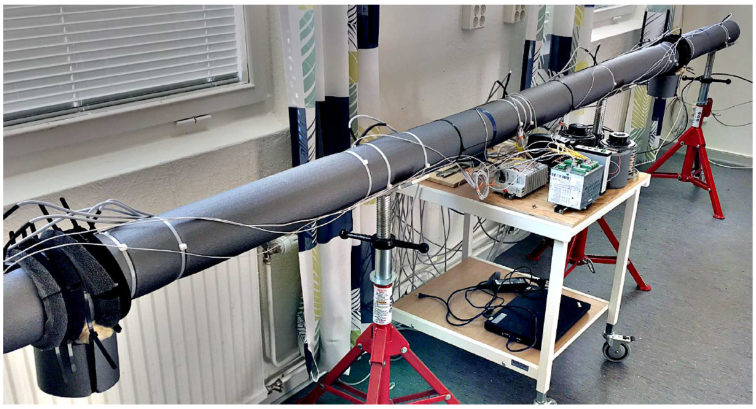
Figur 4 Systemet i problem 8. Här är u_{heat} styrsignal och T_{air} omgivande lufttemperatur. Målet är att hålla utsignalen y på en konstant temperatur r, trots variationer i T_{air}.

a. Bestäm formler för K och T_i för en PI regulator

$$u_{heat}(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau\right), \qquad e(t) = r(t) - y(t)$$

så att slutna systemet får karakteristiskt polynom $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$. ($K$ och T_i kommer bero på ζ, ω och parametrarna i $G_P(s)$.) (2 p)

b. För att minska påverkan av temperaturvariationer i omgivande luft kan man mäta T_{air} och använda framkoppling. Rita ett blockschema där reglersystemet med PI regulatorn i förra uppgiften kompletterats med ett framkopplingsfilter



Figur 5 Prototyp för temperaturregleringen av ESS fasreferenssystem.

$G_{FF}(s)$. Bestäm även det filter $G_{FF}(s)$ som perfekt kompenserar för T_{air}. (2 p)

c. Vid en hastig sänkning av referenstemperaturen r märker man att u_{heat} slår i den nedre gräns $u_{heat,min} = 0$ som finns (systemet kan bara värma, inte kyla). Efter att temperaturen y till slut sjunkit till den nya referensnivån märker man tyvärr att y fortsätter sjunka utan att regulatorn reagerar under lång tid, och en stor undersläng uppstår därför innan regulatorn till slut börjar värma igen. Vad kallas fenomenet och vilken ändring av regulatorn föreslår Du? (1 p)

Solution

a. Det slutna systemet ges av $G_{cl} = \frac{G_p G_r}{1+G_r p G_r}$ with $G_r = K(1+\frac{1}{sT_i})$. Om vi skriver om det slutna systemet på $G_{cl} = \frac{B(s)}{A(s)}$ och identifierar koefficienter i uttrycket $A(s) = s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$ får vi

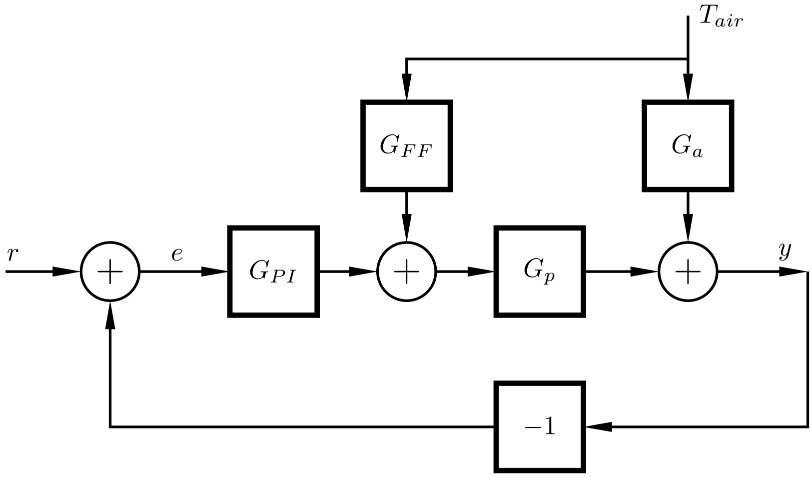
$$K = \frac{2T_p\zeta\omega - 1}{K_p}, \qquad T_i = \frac{2T_p\zeta\omega - 1}{T_p\omega^2}.$$

b. Se figuren nedan för en lösning. Störningen kompenseras perfekt när

$$G_{FF} = -\frac{G_a(s)}{G_p(s)} = -\frac{e^{-sL}(T_p s + 1)}{K_p(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Detta block kan implementeras utan att några approximationer behöver göras (positiv tidsfördröjning och relativ grad är 1).

c. Detta är ett typiskt exempel av integrator windup. En enkel lösning är att inte uppdatera integraldelen då insignalen mättar.



Figur 6 Temperaturregleringen av ESS fasreferenssystem.