

Reglerteknik AK

Övningsexempel 2021



LUNDS
UNIVERSITET

Institutionen för Reglerteknik

Compendium
ISSN 0280-5316

Institutionen för Reglerteknik
Lunds universitet
Box 118
221 00 Lund

© 2021 by Lund University. All rights reserved
Printed in Sweden by KF-Sigma.
Lund 2021

Innehåll

Del I. Övningsexempel	5
1. Modellering och linjärisering	7
2. Dynamiska system	10
3. Frekvensanalys	16
4. Återkopplade system	20
5. Tillståndsåterkoppling och Kalmanfiltrering	28
6. Designmetoder	33
7. Regulatorstrukturer	42
8. Några designexempel	47
9. Interaktiv jämförelse mellan modellbeskrivningar	56
 Del II. Lösningar till övningsexemplen	 59
1. Modellering och linjärisering	61
2. Dynamiska system	66
3. Frekvensanalys	76
4. Återkopplade system	84
5. Tillståndsåterkoppling och Kalmanfiltrering	93
6. Designmetoder	99
7. Regulatorstrukturer	114
8. Några designexempel	120
9. Interaktiv jämförelse mellan modellbeskrivningar	124

Del I

Övningsexempel

Övningsexempel 1

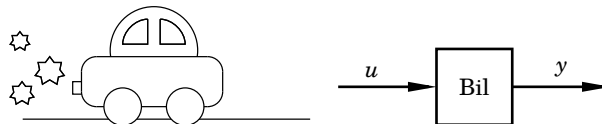
Modellering och linjärisering

1.1 Många situationer i vardagen kan beskrivas och analyseras med hjälp av begrepp från reglerteknik. Tänk igenom scenariona nedan och försök ge en beskrivning som fångar de relevanta egenskaperna hos systemet:

- Vad vill man styra?
- Vilka styrsignaler används?
- Vilka mätsignaler finns tillgängliga?
- Påverkas systemet av några störningar?
- Används öppen styrning eller återkoppling för reglering?
- Rita ett blockschema som beskriver systemet. Blockschemat ska visa hur mätsignalerna, styrsignalerna och störningarna är kopplade till människan (som här är regulator) och till processen.

- a. Du duschar och försöker få en önskad temperatur på vattnet och ett önskat vattenflöde. Duschen har ingen blandare, utan en varmvattenkran och en kallvattenkran.
- b. Du kör bil.
- c. Du kokar potatis på spisen.

1.2 En bil kör på en plan landsväg och vi antar att friktion och luftmotstånd är försumbara. Vi vill undersöka hur bilen påverkas av gaspedalens läge u . Vi antar att u varierar mellan 0 och 1, och att bilens acceleration är proportionell mot gaspedalens läge, $a = ku$.



- a. Ställ upp differentialekvationen som beskriver sambandet mellan gaspedalens läge u och bilens hastighet v . Är systemet linjärt?
- b. Låt istället bilens position p vara utsignal, $y = p$. Inför tillstånden $x_1 = v$ och $x_2 = p$ och skriv systemet på tillståndsform.
- c. Antag nu att bilen påverkas av ett luftmotstånd som ger en motkraft som är proportionell mot bilens hastighet i kvadrat. Med gaspedalens läge som insignal och bilens hastighet som utsignal kan systemet nu skrivas

$$\dot{x} = -mx^2 + ku$$

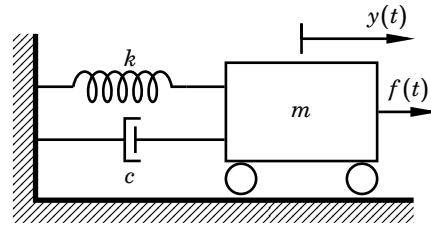
$$y = x$$

Systemet är inte längre linjärt (varför?). Låt $k = 1$ och $m = 0.001$. Hitta den stationära hastighet y^0 som motsvarar att gaspedalen är nedtryckt 10%, $u^0 = 0.1$.

- d. Linjärisera systemet kring den stationära punkten i (c).

Övnings exempel 1. Modellering och linjärisering

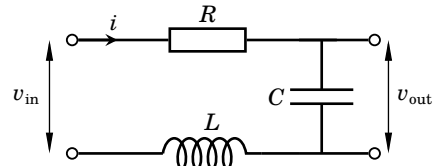
- 1.3** I figuren till höger är en massa m fastsatt i en vägg med en fjäder och en dämpare. Fjäders fjäderkonstanten k och dämparen har dämpningskonstanten c . Det förutsätts att $k > c^2/4m$. På massan verkar en yttre kraft f . Massans förflyttning från sitt viloläge betecknar vi y och låter $f(t)$ vara insignal och $y(t)$ vara utsignal. Kraftekvationen ger att



$$m\ddot{y} = -ky - c\dot{y} + f$$

Inför tillstånden $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ och skriv systemet på tillståndsform.

- 1.4** I RLC-kretsen till höger är spänningen $v_{in}(t)$ insignal och $v_{ut}(t)$ utsignal. Med hjälp av Kirchoffs spänningslag ser vi att



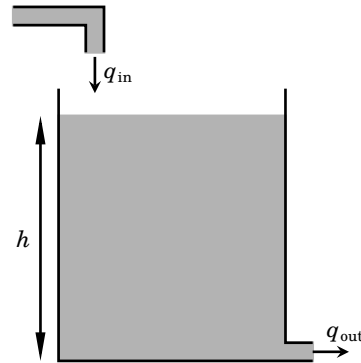
$$v_{in} - Ri - v_{ut} - L \frac{di}{dt} = 0$$

För kondensatorn gäller dessutom att

$$C\dot{v}_{ut} = i$$

Inför tillstånden $x_1 = v_{ut}$ och $x_2 = \dot{v}_{ut}$ och skriv systemet på tillståndsform.

- 1.5** En cylindrisk vattentank med tvärsnittsarean A har ett inflöde och ett utflöde q_{ut} . Målet är att reglera nivån h i tanken via inflödet q_{in} . Utloppsarean är a . Under förutsättning att utloppsarean är liten i förhållande till tankens tvärsnittsarea så gäller Toricellis lag $v_{ut} = \sqrt{2gh}$ för utloppshastigheten.



- Vad är en lämplig tillståndsvariabel för detta system? Bestäm en differentialekvation som anger hur denna beror på inflödet q_{in} .
- Antag att mätsignalen y ges av höjden h . Ange på tillståndsform hur nivån beror på inflödet q_{in} .
- Låt inflödet vara konstant $q_{in} = q_{in}^0$. Bestäm motsvarande konstanta tanknivå h^0 och utflöde q_{ut}^0 . Linjärisera systemet kring denna stationära punkt.

- 1.6** Skriv på tillståndform

$$\ddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u$$

där $u(t)$ är insignal och $y(t)$ är utsignal. Välj tillstånd $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ och $x_3 = \ddot{y}$.

- 1.7** En process med utsignal $y(t)$ och insignal $u(t)$ beskrivs av differentialekvationen

$$\dot{y} + \sqrt{y} + y\dot{y} = u^2$$

- Inför tillstånd $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ och skriv systemet på tillståndsform.
- Finn alla stationära punkter (x_1^0, x_2^0, u^0) till systemet.
- Linjärisera systemet kring den stationära punkt där $u^0 = 1$.

1.8 Linjärisera systemet

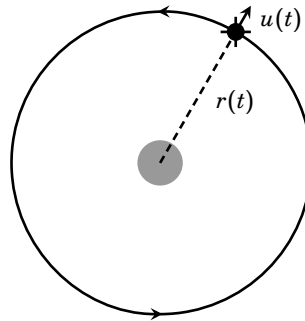
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 x_2 + \sqrt{2} \sin u & (= f_1(x_1, x_2, u)) \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2^2 + \sqrt{2} \cos u & (= f_2(x_1, x_2, u)) \\ y &= \arctan \frac{x_2}{x_1} + 2u^2 & (= g(x_1, x_2, u)) \end{aligned}$$

kring den stationära punkten $u^0 = \pi/4$.

1.9 En enkel modell av en satellit i omloppsbana kring jorden ges av differential-ekvationen

$$\ddot{r}(t) = r(t)\omega^2 - \frac{\beta}{r^2(t)} + u(t)$$

där r är satellitens avstånd till jorden och ω dess vinkelacceleration, se figur 1.1. Satelliten har en liten raketmotor med vars hjälp den kan ges en kraft u i radiell led.



Figur 1.1 Satellit i omloppsbana kring jorden.

a. Inför tillståndsvektorn

$$x(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \end{pmatrix}.$$

Betrakta r som utsignal och ställ upp de olinjära tillståndsekvationerna för systemet.

b. Linjärisera tillståndsekvationerna kring den stationära punkten

$$(r, \dot{r}, u) = (r^0, 0, 0)$$

Skriv upp det linjära systemet på tillståndsform. Uttryck r^0 i β och ω .

Övningsexempel 2

Dynamiska system

2.1 Ett dynamiskt system kan beskrivas på olika sätt - med en överföringsfunktion, med en differentialekvation, och med system av differentialekvationer på tillståndsform. I den här uppgiften omvandlar vi mellan de olika beskrivningarna för fyra exempel på dynamiska system, från biologi, mekanik, elektronik och ekonomi.

a. En modell för bakterietillväxt i en bioreaktor ges av

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

där u är inflödet av glukoslösning till reaktorn och y är massan av bakterier. Bestäm överföringsfunktionen från u till y samt en differentialekvation som beskriver sambandet mellan in- och utsignal för systemet.

b. En enkel modell av ett teleskop ges av

$$J \frac{d^2 y}{dt^2} + D \frac{dy}{dt} = u$$

där y är teleskopets vinkel mot jordytan och u är vridmomentet från motorn som styr teleskopet. Bestäm överföringsfunktionen från u till y samt skriv systemet på tillståndsform.

c. Ett elektroniskt lågpassfilter används vid ljudinspelning för att dämpa ut högfrekvent brus. Insignalen u är den ursprungliga brusiga signalen och utsignalen y är den signal som registreras. Filtret skrivs på tillståndsform som

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{k}x + \frac{1}{k}u \\ y &= x\end{aligned}$$

Bestäm överföringsfunktionen från u till y .

d. Överföringsfunktionen för en modell som beskriver ekonomisk tillväxt ges av

$$G(s) = \frac{\gamma}{s^3 + \alpha s^2 + \beta s}$$

där insignalen u är skillnaden mellan sparande och investeringar i ekonomin, och utsignalen y är BNP. Skriv systemet på tillståndsform.

2.2 Bestäm överföringsfunktionen samt ange en differentialekvation som beskriver sambandet mellan in- och utsignal för systemen

a.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} x + 2u\end{aligned}$$

b.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -15 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} x$$

c.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + 5u$$

d.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} x + 3u$$

2.3 Bestäm impulssvar och stegsvar för systemen i uppgift 2.2.

2.4 Härled formeln $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ för ett allmänt system

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

2.5 Betrakta systemet

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

- a. Beräkna systemets poler och nollställen. Är systemet stabilt?
- b. Vad är systemets statiska förstärkning?
- c. Beräkna startvärdet och slutvärdet för systemets stegsvar.
- d. Beräkna startvärdet och slutvärdet för systemets impulssvar.
- e. Beräkna begynnelsederivatan för systemets stegsvar.

2.6 Betrakta systemet

$$G(s) = \frac{0.25}{s^2 + 0.6s + 0.25}$$

- a. Beräkna systemets poler och nollställen.
- b. Vad är systemets statiska förstärkning?
- c. Beräkna och skissa systemets stegsvar.

2.7 Bestäm överföringsfunktionen och poler för den svängande massan i uppgift 1.3. Förklara hur polerna flyttar sig om man ändrar k respektive c . Kan polerna hamna i höger halvplan?

2.8 Bestäm överföringsfunktionen för

- a. RLC-kretsen i uppgift 1.4,

b. den linjäriserade tanken i uppgift 1.5

2.9 Betrakta det linjära och tidsinvarianta systemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

a. Är systemet asymptotiskt stabilt?

b. Är systemet stabilt?

2.10 Har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+4}{s^3+2s^2+3s+7}$$

någon pol i höger halvplan?

2.11 Avgör vilka fem av de följande överföringsfunktionerna som hör ihop med något av de nedanstående stegsvaren A–E.

$$G_1(s) = \frac{0.1}{s+0.1}$$

$$G_2(s) = \frac{4}{s^2+2s+4}$$

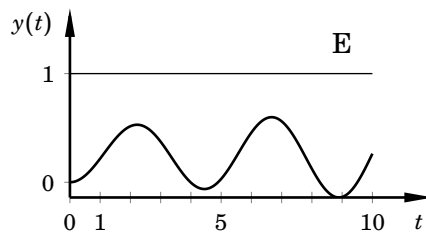
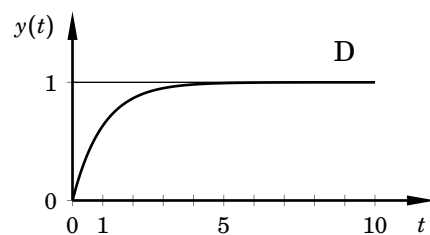
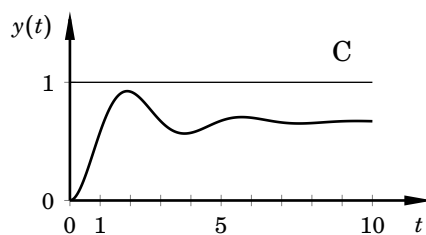
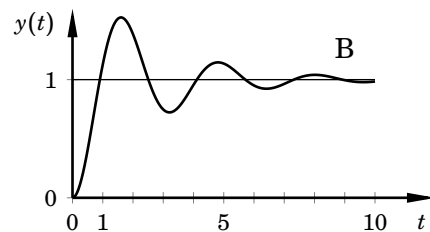
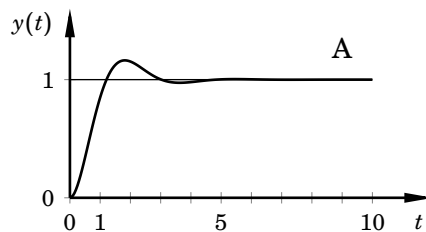
$$G_3(s) = \frac{0.5}{s^2-0.1s+2}$$

$$G_4(s) = \frac{-0.5}{s^2+0.1s+2}$$

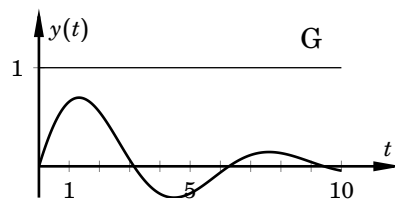
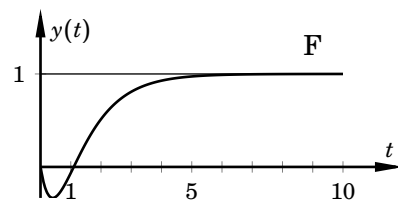
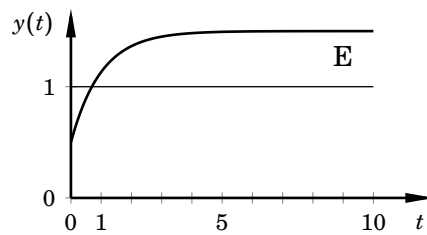
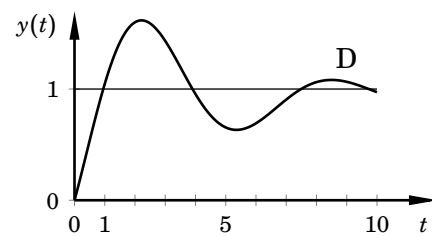
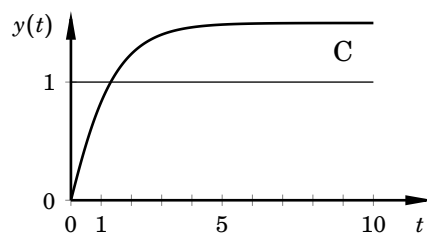
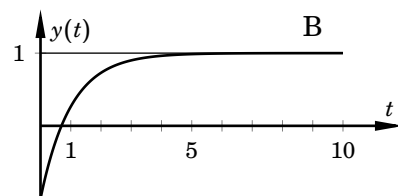
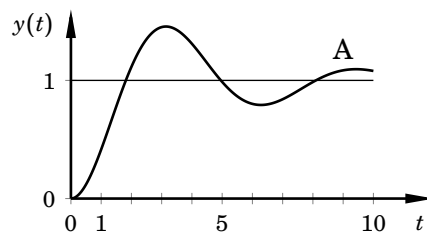
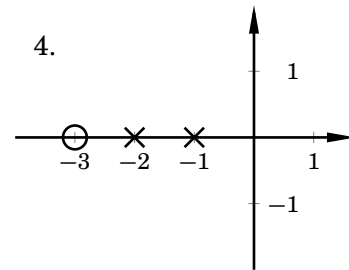
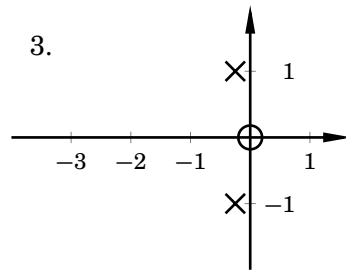
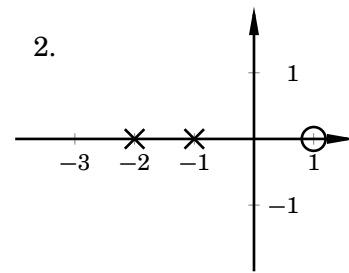
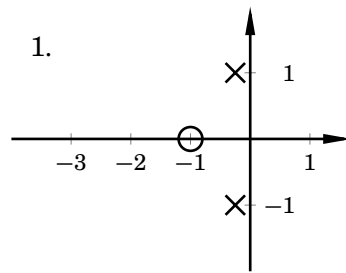
$$G_5(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_6(s) = \frac{4}{s^2+0.8s+4}$$

$$G_7(s) = \frac{2}{s^2+s+3}$$

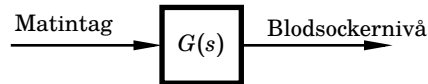


2.12 Para ihop vart och ett av de fyra pol-nollställediagram med något av stegsvaren A–G.



Övningsexempel 2. Dynamiska system

- 2.13** Glykemiskt index är ett mått på hur snabbt kolhydrater från maten tas upp av kroppen. För att ta fram glykemiskt index studerar man systemet nedan, där överföringsfunktionen $G(s)$ är olika för olika typer av kolhydrater.



- a. I figuren nedan visas impulssvaret från matintag till blodsockernivå för två typer av mat, fullkornspasta med lågt GI (heldragen linje) och sockerdricka med högt GI (streckad linje). Vilka av följande överföringsfunktioner kan användas för att modellera kroppens upptag av fullkornspasta, respektive sockerdricka?

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

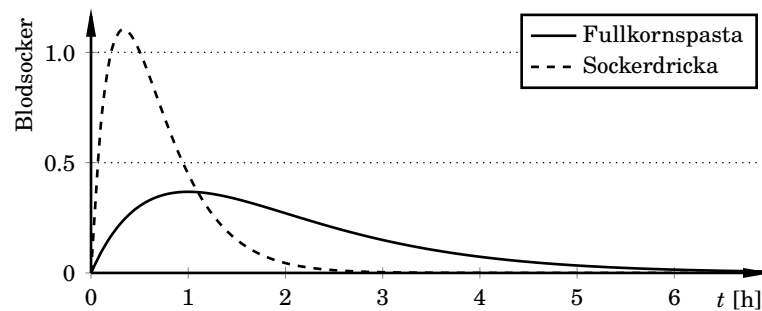
$$G_2(s) = \frac{1}{s/3+1}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$G_4(s) = \frac{1}{(s/3+1)^2}$$

$$G_5(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

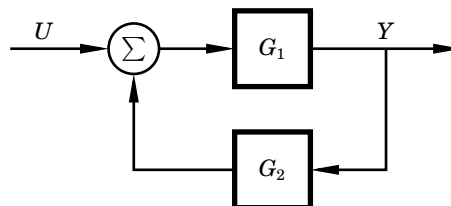
$$G_6(s) = \frac{1}{s(s/3+1)}$$



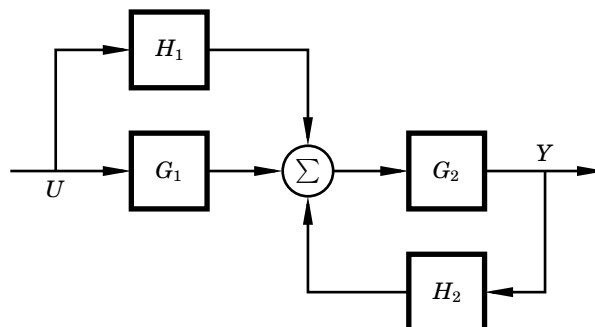
- b. Varför är det mer intressant att titta på impulssvar än stegsvar för den här tillämpningen?

- 2.14** Bestäm överföringsfunktionen från U till Y för

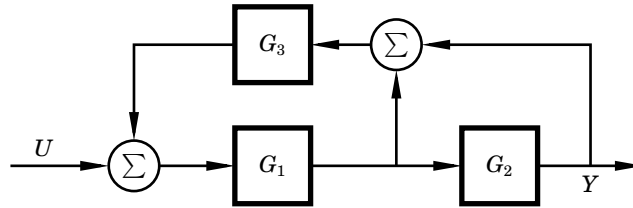
a.



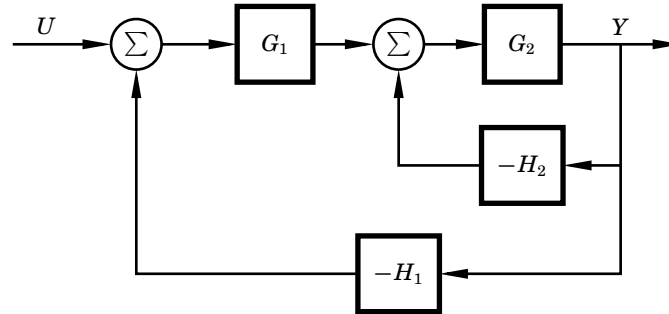
b.



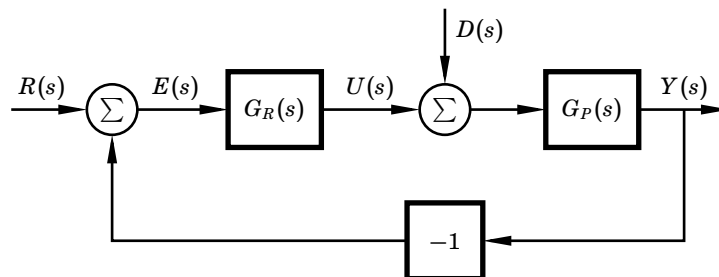
c.



d.



- 2.15** Blockschemat i figur 2.1 visar temperaturregleringen i ett rum. Mätsignalen y är temperaturen i rummet. Styrsignalen u är värmeelementens effekt. Referensvärdet r är den önskade temperaturen. En regulator $G_R(s)$ styr värmeelementets effekt baserat på skillnaden mellan den önskade och den uppmätta temperaturen, e . Temperaturen i rummet påverkas också av utetemperaturen som kan ses som en störning d .



Figur 2.1

- Bestäm överföringsfunktionen från $R(s)$ till $Y(s)$.
- Bestäm överföringsfunktionen från $D(s)$ till $Y(s)$.
- Bestäm överföringsfunktionen från $R(s)$ till $E(s)$.
- Bestäm överföringsfunktionen från $D(s)$ till $U(s)$.

- 2.16** Betrakta följande överföringsfunktion:

$$G(s) = \frac{s^2 + 6s + 7}{s^2 + 5s + 6}$$

Skriv systemet på

- diagonalform
- styrbar kanonisk form
- observerbar kanonisk form

Övningsexempel 3

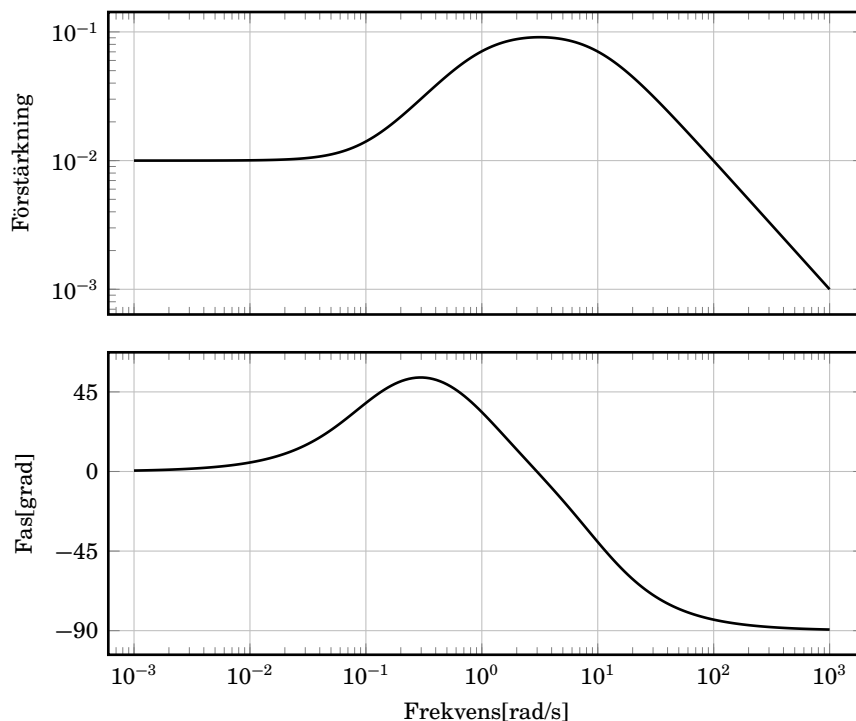
Frekvensanalys

3.1 Antag att systemet

$$G(s) = \frac{0.01(1 + 10s)}{(1 + s)(1 + 0.1s)}$$

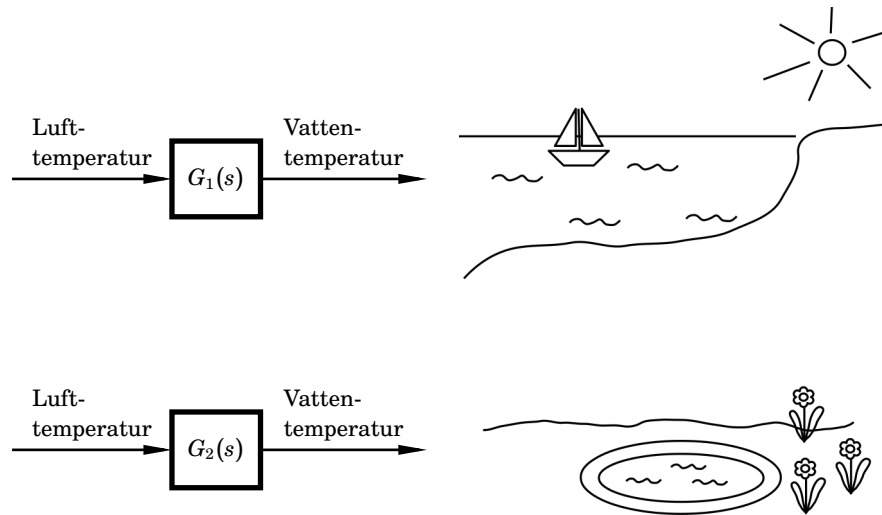
utsätts för insignalen $u(t) = \sin 3t$, $-\infty < t < \infty$

- Beräkna utsignalen $y(t)$.
- Bodediagrammet för systemet visas nedan. Bestäm utsignalen på ett ungefär genom att använda Bodediagrammet istället.

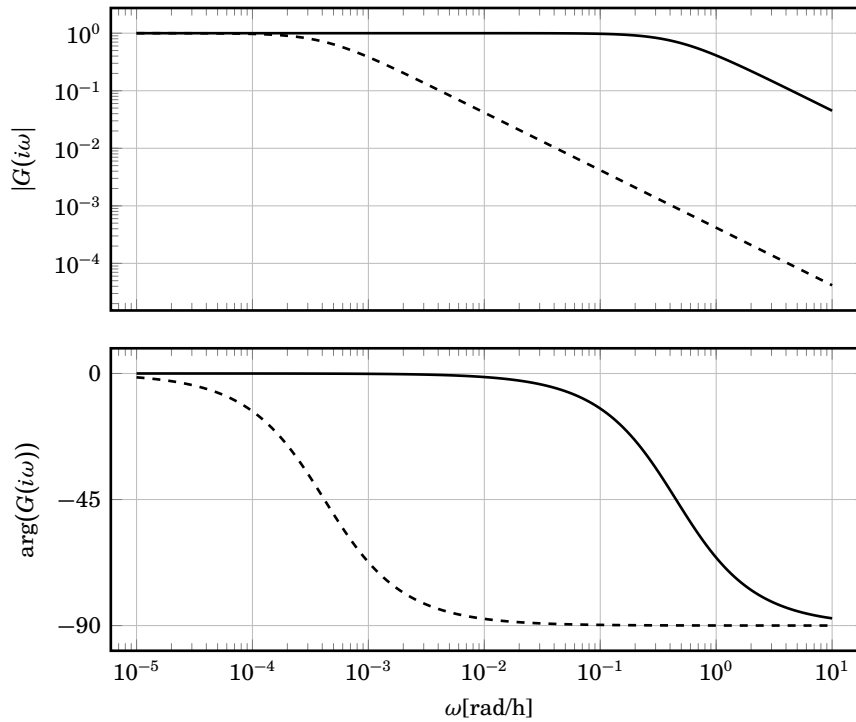


3.2 Vi analyserar de två systemen i figur 3.2, havsvattnet i Öresund och vattnet i en liten trädgårdspool. Insignalen till systemen är lufttemperaturen och utsignalen är vattentemperaturen.

- Figur 3.3 visar två Bodediagram. Vilket diagram hör till vilket system?
- Vi antar att lufttemperaturen varierar sinusformat med period $T = 1$ år. Luftens högsta temperatur på sommaren är 19°C och lägsta på vintern är -5°C . Vad är skillnaden mellan högsta och lägsta havsvattentemperatur under året? Använd Bodediagrammet.
- Under en sommardag antar vi att lufttemperaturen varierar sinusformat med period $T = 1$ dag. Dagens högsta temperatur (kl 13.00) är 27°C och lägsta temperaturen (kl 1.00) är 14°C . När under dagen är vattnet i trädgårdspoolen varmast?



Figur 3.1



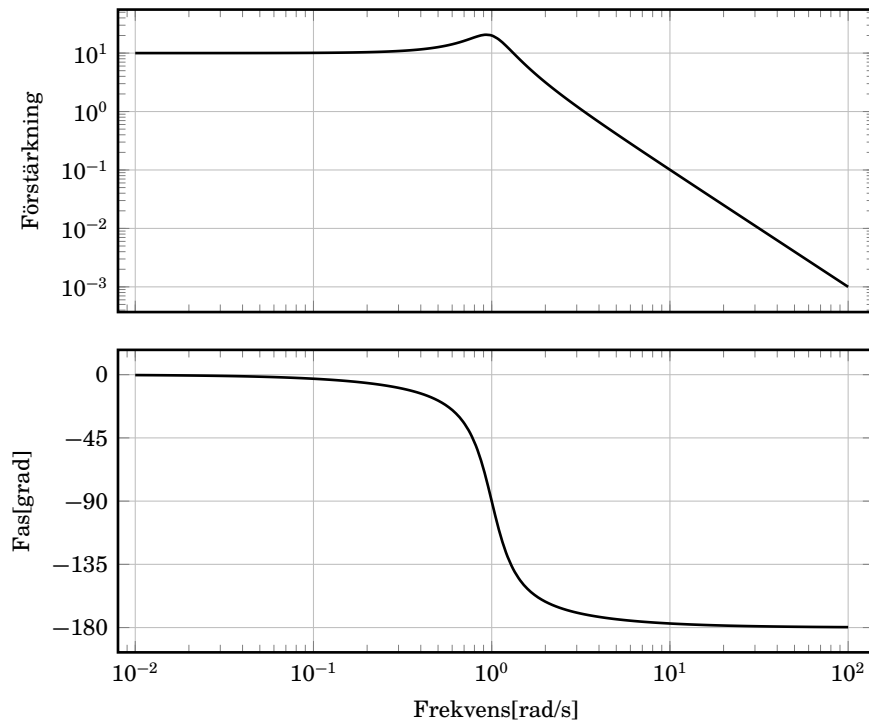
Figur 3.2 Bodediagram till uppgift 3.2.

- 3.3** Antag att den svängande massan i uppgift 1.3 har $m = 0.1$ kg, $c = 0.05$ Ns/cm och $k = 0.1$ N/cm så att överföringsfunktionen blir

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 0.5s + 1}$$

- Låt massan påverkas av kraften $f = \sin \omega t$, $-\infty < t < \infty$. Beräkna utsignalen när $\omega = 0.2, 1$ respektive 30 rad/s.
- Använd istället systemets Bodediagram i figur 3.3 för att ungefärligt bestämma utsignalen när $\omega = 0.2, 1$ respektive 30 rad/s.

Övningsexempel 3. Frekvensanalys



Figur 3.3 Bodediagrammet för den svängande massan i uppgift 3.3.

3.4 Rita Bodediagrammet för följande överföringsfunktioner:

a.
$$G(s) = \frac{3}{1 + s/10}$$

b.
$$G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)(1 + s)}$$

c.
$$G(s) = \frac{e^{-s}}{1 + s}$$

d.
$$G(s) = \frac{1 + s}{s(1 + s/10)}$$

e.
$$G(s) = \frac{2(1 + 5s)}{s(1 + 0.2s + 0.25s^2)}$$

3.5 Utnyttja resultatet från föregående uppgift för att rita Nyquistdiagrammet för

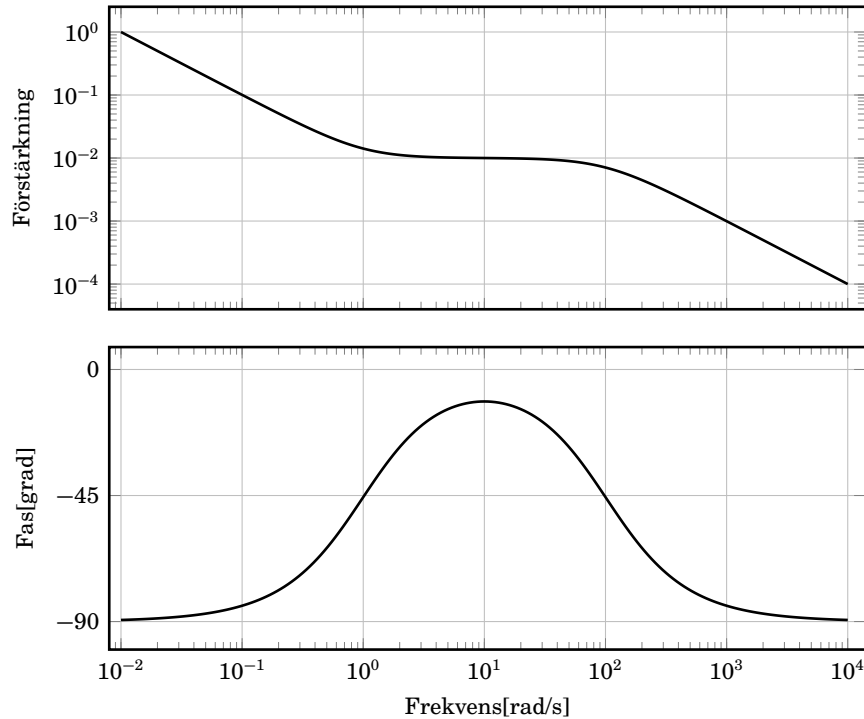
a.
$$G(s) = \frac{3}{1 + s/10}$$

b.
$$G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)(1 + s)}$$

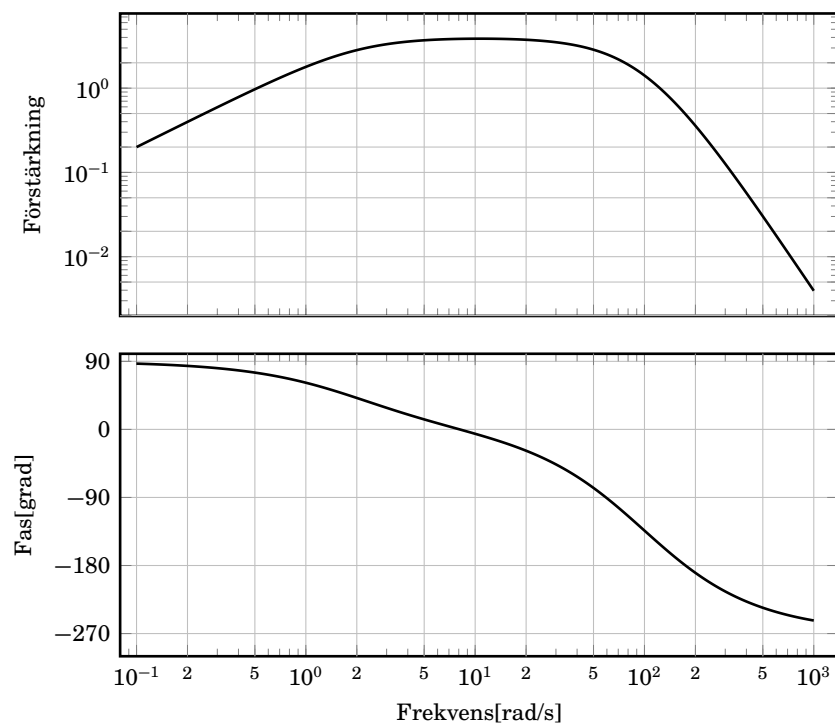
c.

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{1+s}$$

- 3.6** För att undersöka dynamiken hos ett stabilt system har man genom frekvensvarsexperiment uppmätt Bodediagrammet nedan. Vad är systemets överföringsfunktion?



- 3.7** För att undersöka dynamiken hos ett okänt system har man mätt upp dess Bodediagram, se nedan. Bestäm med hjälp av Bodediagrammet systemets överföringsfunktion.



Övningsexempel 4

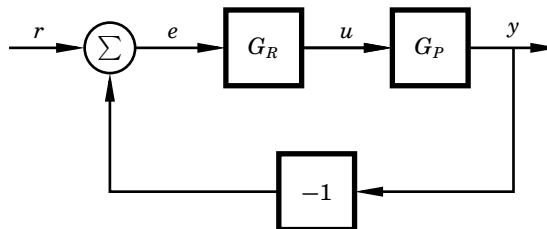
Återkopplade system

4.1 Antag att luftens temperatur y i en ugn beskrivs av differentialekvationen

$$\dot{y}(t) + 0.01y(t) = 0.01u(t)$$

där u är värmeelementets temperatur.

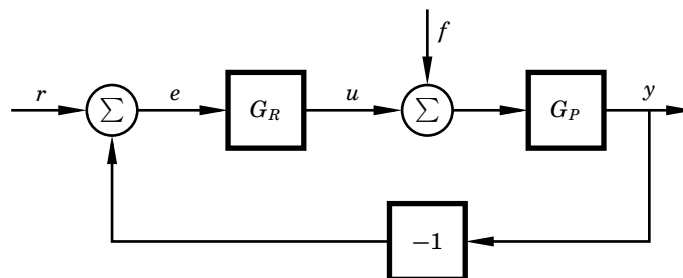
- Låt u vara insignal och y utsignal och bestäm ugnens överföringsfunktion $G_P(s)$.
- Ugnen ska regleras med en P-regulator, $G_R(s) = K$, enligt blockschemat nedan. Vad blir slutna systemets överföringsfunktion?



- Välj K så att slutna systemet får det karakteristiska polynomet

$$s + 0.1$$

4.2 I figuren nedan visas ett blockschema för ett hydrauliskt servosystem i en automatsvarv.



Mätsignalen $y(t)$ representerar svarvstålets position, $r(t)$ är svarvstålets önskade läge och $f(t)$ är skärkraften. G_R är lägesgivarens och förstärkarens överföringsfunktion, och G_P är dynamiken för verktygssliden och hydraulkolven:

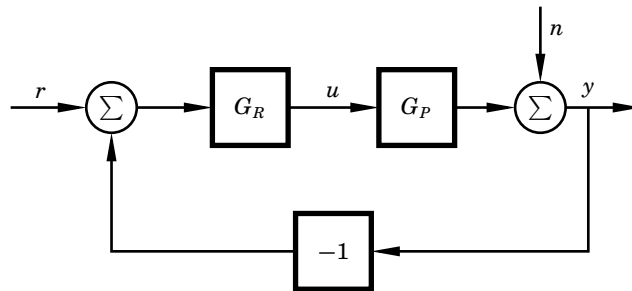
$$G_P(s) = \frac{1}{ms^2 + ds}$$

där m är massan för kolv och slid, och d slidens viskösa dämpning. I uppgiften antas att $r(t) = 0$.

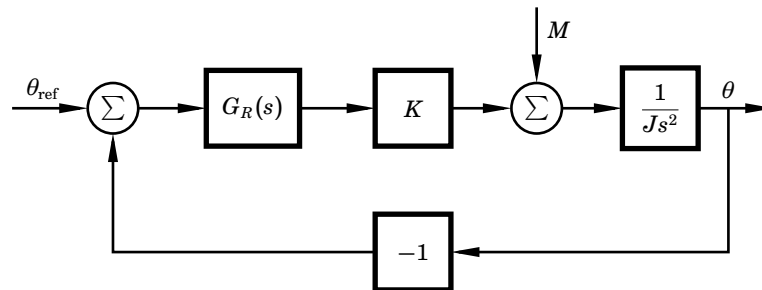
- Hur stor blir i stationärt tillstånd avvikelsen $e(t) = r(t) - y(t)$ mellan svarvstålets verkliga läge och dess referensvärde då skärkraften $f(t)$ ändras i form av ett enhetssteg? Regulatorn antas vara en förstärkare med konstant förstärkning $G_R(s) = K$.

- b. Hur förändras detta fel om förstärkaren ersätts med en PI-regulator med överföringsfunktionen $G_R(s) = K_1 + K_2/s$?

- 4.3 En process regleras med en proportionell regulator enligt figuren nedan. Det förutsätts att $r = 0$.



- a. Vid mätningen av processens utsignal uppträder en störning n . Beräkna överföringsfunktionerna från n till y resp. från n till u .
- b. Låt $G_P(s) = \frac{1}{s+1}$ och antag att störningen består av en sinussignal $n(t) = A \sin \omega t$. Vad blir u och y efter att transienterna avklingat?
- c. Antag att $K = 1$ och $A = 1$ i föregående deluppgift. Beräkna svängningarnas amplitud i u och y för fallen $\omega = 0.1$ resp. 10 rad/s.
- 4.4 I figuren nedan visas ett blockschema för en gyrostabiliserad plattform. Den styrs av en motor som ger ett moment på plattformen. Plattformens vinkel läge avkänns med ett gyroskop, som ger en signal proportionell mot plattformens avvikelse från referensvärdet. Signalen förstärks av en förstärkare med överföringsfunktionen G_R .



Det är önskvärt att stegändringar i referensvärdet θ_{ref} eller störmomentet M på plattformen ej ger något bestående vinkelfel. Ange i detta fall *formen* på överföringsfunktionen G_R . Ledning: Ansätt $G_R(s) = Q(s)/P(s)$, $\theta_{ref}(s) = \theta_{ref}^o/s$ och $M(s) = M^o/s$.

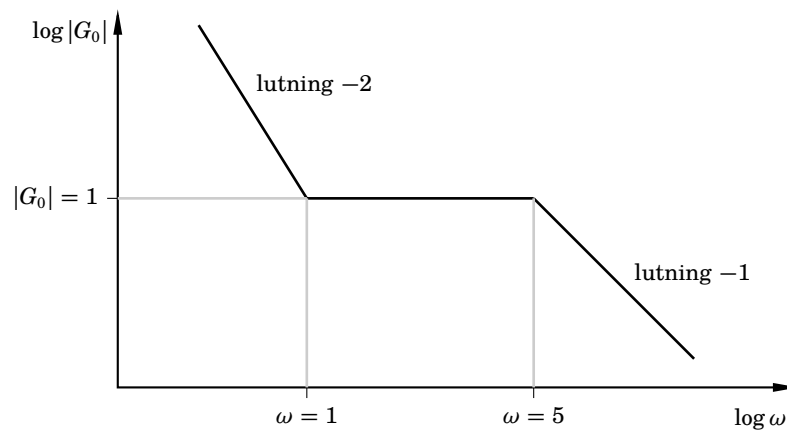
- 4.5 Vid upphettning av ett temperaturlbad kan man anta att temperaturen växer linjärt med $1^\circ\text{C}/\text{sekund}$. Temperaturen mätes med ett termoelement vars överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT}$$

där tidskonstanten $T = 10$ sekunder. Efter ett insvängningsförlopp erhålles stationära betingelser så tillvida att temperaturgivarens utslag växer med konstant hastighet. Vid en tidpunkt avläses temperaturen till 102.6°C . Beräkna badets verkliga temperatur.

- 4.6 Betrakta ett system $G_0(s)$ med följande asymptotiska amplitudkurva. Antag att systemet saknar tidsfördröjningar och nollställen i höger halvplan.

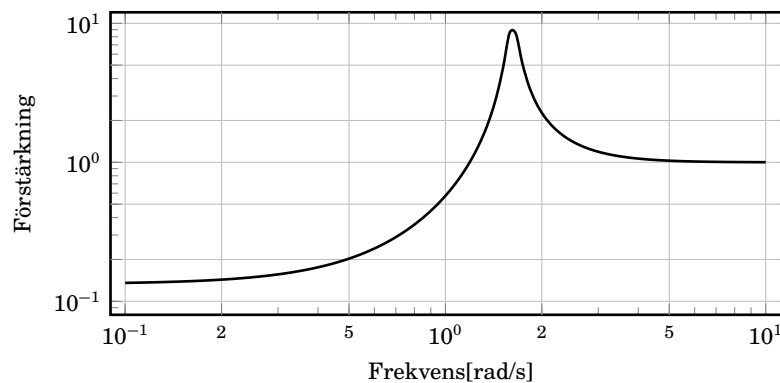
Övnings exempel 4. Återkopplade system



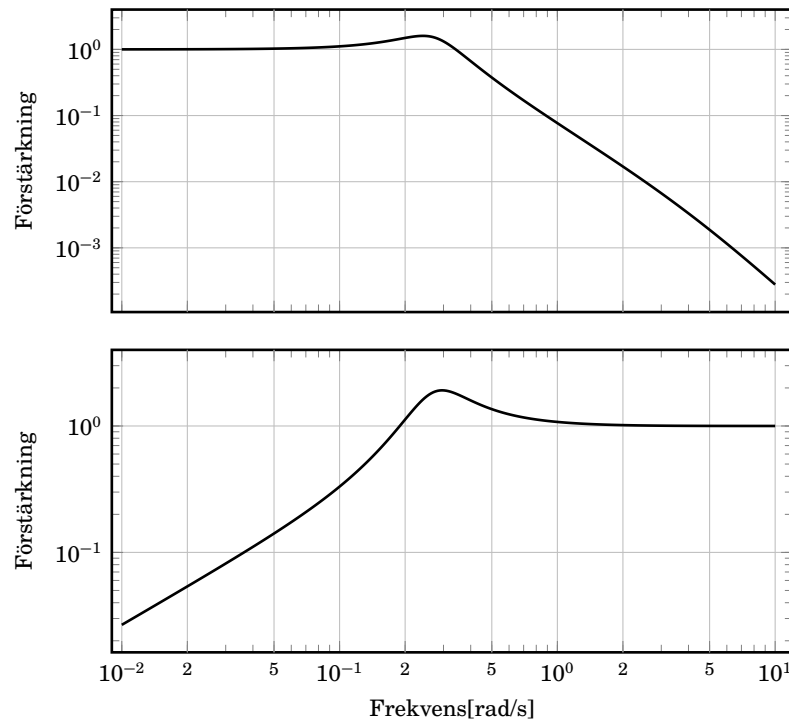
Antag att systemet återkopplas med -1 och att det slutna systemet är stabilt. Vilken eller vilka av följande referenssignaler kan det slutna systemet följa utan stationärt fel?

Antag att $r(t) = 0$ då $t < 0$, samt att konstanterna a , b och $c \neq 0$.

- a. $r(t) = a$
 - b. $r(t) = bt$
 - c. $r(t) = ct^2$
 - d. $r(t) = a + bt$
 - e. $r(t) = \sin(t)$
- 4.7** I en enkel reglerkrets är processen given av $G_P(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$ och regulatorn av $G_R(s) = 6.5$.
- a. Bestäm känslighetsfunktionen $S(s)$.
- Känslighetsfunktionens amplituddiagram visas nedan.
- b. Hur mycket dämpas lågfrekventa laststörningar av reglerkretsen i slutna loop jämfört med öppen loop?
 - c. Vid vilken vinkelfrekvens är reglerkretsen känsligast för störningar och hur mycket förstärks störningar som mest?



- 4.8** Nedanstående figur visar amplitudkurvorna för känslighetsfunktionen S och den komplementära känslighetsfunktionen T för en normal reglerkrets.



- Avgör vilken kurva som motsvarar känslighetsfunktionen och vilken som motsvarar den komplementära känslighetsfunktionen.
- Ange de frekvensintervall där störningar förstärks respektive reduceras av återkopplingen. Hur mycket förstärks störningar i värsta fallet?
- Ange det frekvensområde där utsignalen väl kan följa referensvärdet.
- Vad är minsta avståndet mellan kretsöverföringens Nyquistkurva och punkten -1 i det komplexa talplanet? Vad innebär detta för amplitudmarginalen?

4.9 I en enkel reglerkrets är kretsöverföringsfunktionen

$$G_o(s) = G_R(s)G_P(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

Rita rotorten för det återkopplade systemets karakteristiska ekvation med avseende på förstärkningsparametern K .

4.10 I en enkel reglerkrets är kretsöverföringsfunktionen

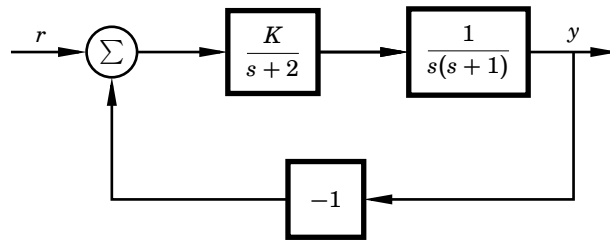
$$G_o(s) = G_R(s)G_P(s) = \frac{K(s+10)(s+11)}{s(s+1)(s+2)}$$

- För vilka värden på K är det återkopplade systemet stabilt?
- Skissa rotortens principiella utseende.

4.11 Figuren nedan visar blockschemat för en skrivare.

- För vilka värden på förstärkningen K är systemet asymptotiskt stabilt?
- Man vill att skrivaren skall kunna följa en rampändring av referenssignalen med ett fel som är mindre än 5 mV stationärt då rampändringen är 0.1 V/s. Kan detta uppnås genom lämplig injustering av förstärkningen K ?

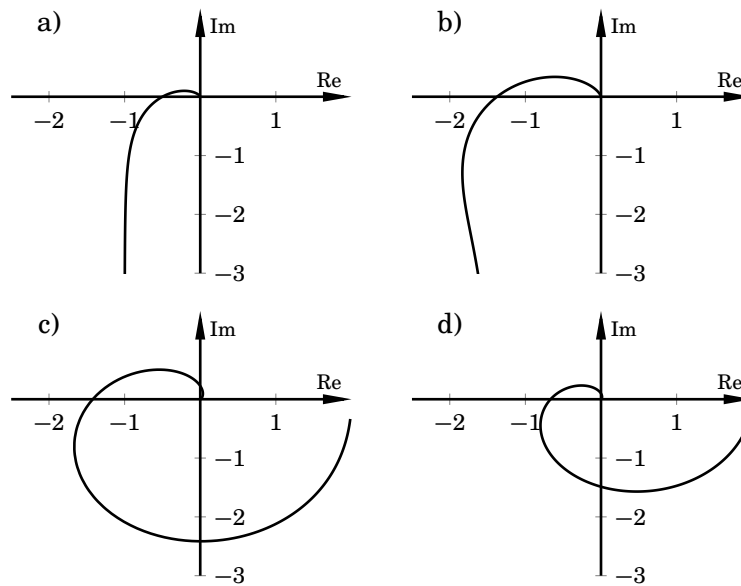
Övnings exempel 4. Återkopplade system



- 4.12** Betrakta Nyquist-kurvorna i figur 4.1. Antag att motsvarande system regleras med en proportionell regulator:

$$u = K(r - y)$$

För vilka K är det slutna systemet stabilt? I samtliga fall gäller att det öppna systemet saknar poler i höger halvplan.



Figur 4.1 Nyquistkurvor i uppgift 4.12.

- 4.13** Betrakta en process med överföringsfunktionen

$$G_P(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

Undersök stabiliteten hos det slutna system som erhålles med proportionell återkoppling

$$u = K(r - y)$$

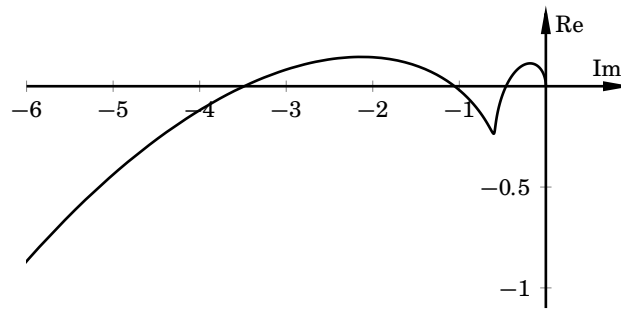
Ange speciellt det kritiska värdet på förstärkningen K då systemet övergår från stabilitet till instabilitet. Använd Nyquistteoremet.

- 4.14** Nyquistkurvan för ett system är given i figur 4.2. Systemet är stabilt, dvs saknar poler i höger halvplan.

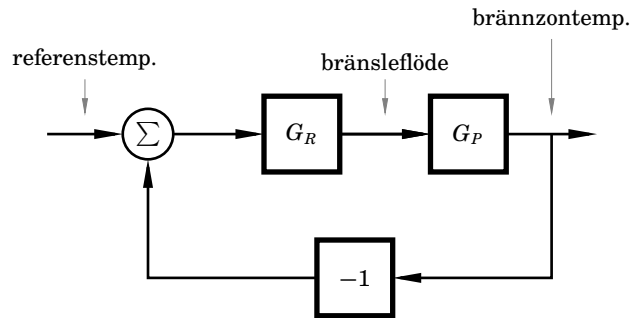
Antag att systemet återkopplas proportionellt med styrlagen

$$u = K(r - y)$$

Ange för vilka värden på förstärkningen K som det slutna systemet är stabilt.



Figur 4.2 Nyquistkurva för systemet i uppgift 4.14.



Figur 4.3 Blockschema för cementugn med temperaturregulator i problem 4.15.

- 4.15** För att få jämn produktkvalitet i en cementugn är det väsentligt att den s.k. brännzontemperaturen hålls konstant. Detta åstadkommes genom att man mäter brännzontemperaturen och reglerar bränsleflödet med en proportionell regulator. Ett blockschema för systemet visas i figur 4.3. Hur stor får regulatorns förstärkning K högst vara om det återkopplade systemet skall vara stabilt? Överföringsfunktionen från bränsleflöde till brännzontemperatur är

$$G_P(s) = \frac{e^{-9s}}{(1 + 20s)^2}$$

- 4.16** I en destillationskolonn gäller att överföringsfunktionen från energitillförsel till koncentration i vätskefasen hos en lättflyktig komponent är

$$G_P(s) = \frac{e^{-sL}}{1 + 10s}$$

där tidsskalan är mätt i minuter. Processen regleras med en PI-regulator med överföringsfunktionen

$$G_R(s) = 10 \left(1 + \frac{1}{2s} \right)$$

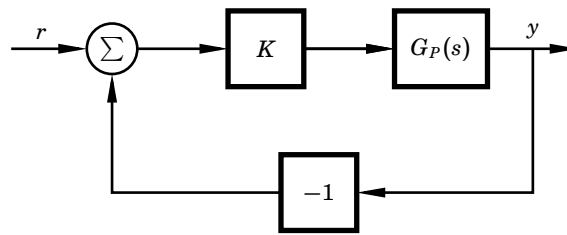
Hur stor får transportfördröjningen L högst vara för att systemet skall ha minst 10° fasmarginal?

- 4.17** En process med överföringsfunktionen $G_P(s)$ återkopplas enligt figur 4.4. Processen $G_P(s)$ har samtliga poler i vänster halvplan, och Nyquistkurvan för G_P visas i figur 4.5. Det förutsättes att $G_P(i\omega)$ inte skär reella axeln fler gånger än vad som visas i figuren.

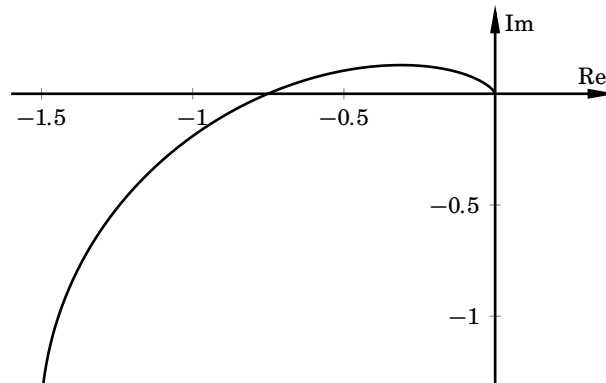
Vilka av nedanstående alternativ är riktiga? Motivera!

- Amplitudmarginalen $A_m < 2$ om $K = 1$.
- Fasmarginalen $\varphi_m < 45^\circ$ om $K = 1$.

Övningsexempel 4. Återkopplade system

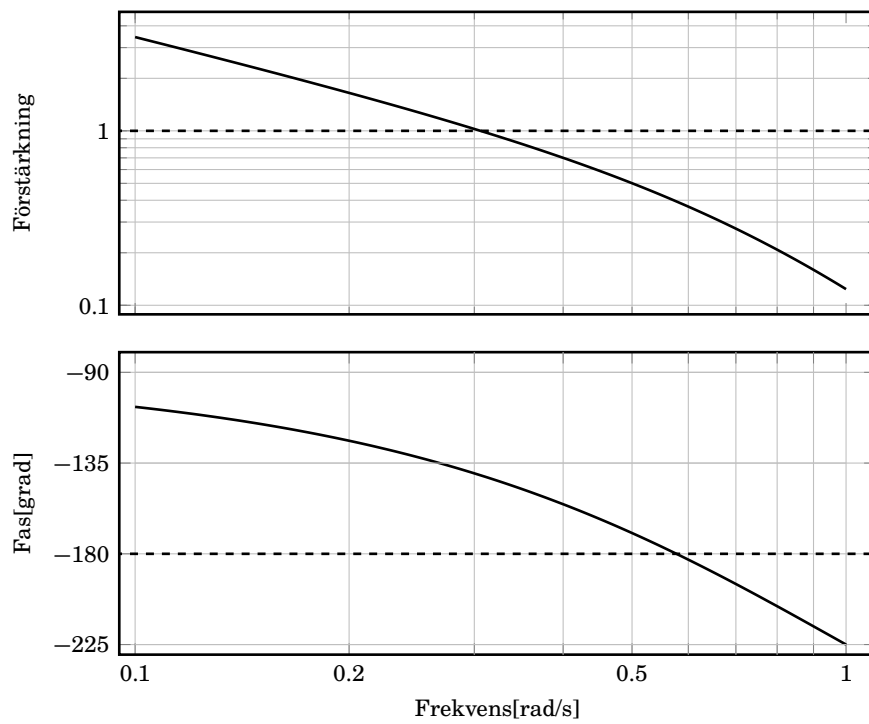


Figur 4.4 Återkopplat system i uppgift 4.17.

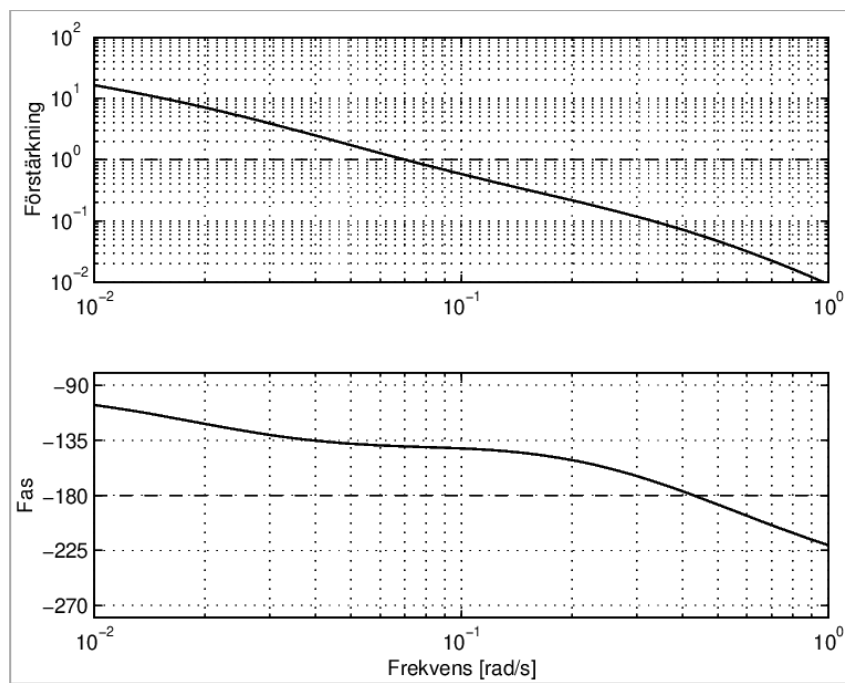


Figur 4.5 Nyquistkurva för processen $G_P(s)$ i uppgift 4.17.

- c. Om förstärkningen K sänks minskar fasmarginalen.
 - d. Om $K = 2$ blir det återkopplade systemet instabilt.
- 4.18** Bodediagrammet för kretsöverföringsfunktionen $G_o = G_R G_P$ för en viss regulator och process visas i figur 4.6. Antag att systemet återkopplas enkelt.
- a. Hur mycket kan regulatorns eller processens förstärkning öka utan att det slutna systemet blir instabilt?
 - b. Hur mycket ytterligare negativ fasförskjutning kan introduceras vid skärfrekvensen utan att det slutna systemet blir instabilt?
- 4.19** Ett Bodediagram för kretsöverföringen när den undre tanken i dubbeltank-processen regleras visas i figur 4.7. Vad är systemets döttidsmarginal?



Figur 4.6 Bodediagram för kretsöverföringen i problem 4.18.



Figur 4.7 Bodediagram för kretsöverföringen vid reglering av undre tanken i uppgift 4.19.

Övningsexempel 5

Tillståndsåterkoppling och Kalmanfiltrering

5.1 Ett linjärt system beskrivs av matriserna

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad D = 0$$

- a. För vilka värden på β är systemet styrbart?
- b. För vilka värden på γ är systemet observerbart?

5.2 Ett linjärt system beskrivs av matriserna

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ange vilka tillstånd som är styrbara.

5.3 Givet systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Är systemet observerbart? Om inte, ange vilka tillstånd som inte är observerbara.

5.4 Betrakta systemet

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kan man på ändlig tid uppnå punkterna $(3 \ 0.5)^T$, $(5 \ 5)^T$, $(0 \ 0)^T$, $(10 \ 0.1)^T$, $(1 \ -0.5)^T$? Vilka punkter kan uppnås?

5.5 Betrakta följande system:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Är systemet styrbart?

5.6 Ett dynamiskt system beskrivs med tillståndsmodellen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

- a. Är systemet styrbart? Vilka tillstånd kan på ändlig tid nås från begynnelsestillståndet $x(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$?
- b. Beräkna systemets överföringsfunktion.
- c. Kan samma in-utsignalrelation beskrivas med färre antal tillstånd? Ange i så fall en sådan tillståndsbeskrivning.

5.7 Ett linjärt dynamiskt system med överföringsfunktionen $G(s)$ är givet. Systemet är styrbart. Vilket eller vilka av nedanstående påståenden är säkert sanna?

- a. Genom återkoppling från alla tillstånd kan polerna till det slutna systemets överföringsfunktion placeras godtyckligt.
- b. Genom återkoppling från alla tillstånd kan nollställena till det slutna systemets överföringsfunktion placeras godtyckligt.
- c. Om tillståndsvariablerna ej är tillgängliga för mätning, kan de alltid skattas genom derivering av utsignalen.
- d. Om tillståndsvektorn skattas med ett Kalmanfilter

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

kan man genom val av matrisen K åstadkomma godtyckligt snabb konvergens av den estimerade tillståndsvektorn $\hat{x}$ mot den verkliga tillståndsvektorn x .

5.8 Bestäm en styrlag $u = l_r r - Lx$ för systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

så att det återkopplade systemets poler placeras i -4 och den stationära förstärkningen blir 1.

5.9 Lashuvudets position i en hårddisk beskrivs av tillståndsmodellen

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

- a. Beräkna en tillståndsåterkoppling,

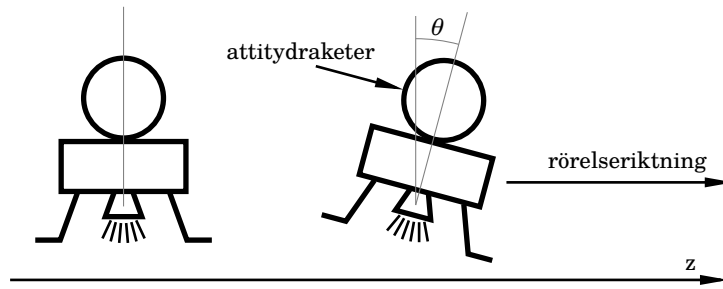
$$u = -Lx + l_r r$$

så att det slutna systemet får poler i $s = -4 \pm 4i$ och så att den statiska förstärkningen från referensvärdet till utsignalen blir 1.

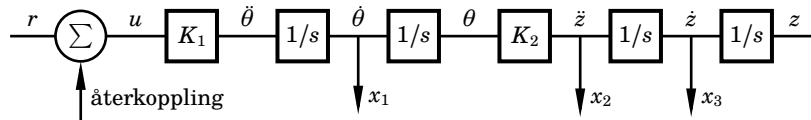
- b. Beräkna ett Kalmanfilter,

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

för systemet. Motivera kort nödvändiga designval.



Figur 5.1 Månlandaren i problem 5.10.



Figur 5.2 Blockschemat för månlandarens dynamik i z-led.

5.10 Figur 5.1 visar Apolloprojektets månlandningsfarkost LEM. Vi skall studera ett möjligt system för reglering av horisontell förflyttning över månytan. Antag att farkosten svävar med hjälp av raketmotorn en bit över månytan. Om farkostens attitydvinkel (vinkel i förhållande till lodlinjen) är skild från noll erhålles en kraftkomponent i horisontalled och vi får acceleration utefter månytan. Astronauten styr farkostens läge med hjälp av attitydraketer.

Studera blockschemat som visar sambandet mellan u , styrsignalen till attitydraketerna, attitydvinkeln θ samt lägeskoordinaten z . Se figur 5.2.

I både θ - och z -led lyder farkosten Newtons rörelselag utan någon som helst dämpning. Överföringsfunktionen från astronautens styrsignal u till längdkoordinaten z är

$$G_z(s) = \frac{K_1 K_2}{s^4}$$

och är helt omöjlig att styra manuellt. För att underlätta astronautens styruppgift ändrar vi på farkostens dynamik genom att införa interna återkopplingar. Det innebär att astronautens styrspak inte är direkt kopplad till motorerna utan istället fungerar som en joystick som anger vilken *hastighet* farkosten ska ha.

En regulator ska sedan omvandla utslaget på styrspaken till en styrsignal till attitydraketerna. Vi har till vårt förfogande följande mätsignaler:

- Attitydvinkelns tidsderivata $\dot{\theta}$ mätt med ratogyro.
- Accelerationen i z -led ($\ddot{z}$) mätt med accelerometrar på gyrostabiliserad plattform.
- Hastigheten i z -led ($\dot{z}$) mätt med dopplerradar.

a. Inför tillstånden

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{\theta} \\ x_2 &= \ddot{z} \\ x_3 &= \dot{z} \end{aligned}$$

och skriv systemet på tillståndsform. Låt hastigheten i z -led vara utsignal till systemet.

b. Ange en återkoppling som utnyttjar de tre mätsignalerna så att systemet får tre poler i $s = -0.5$ och så att astronautens styrsignal blir börvärde för hastigheten i z -led. Du behöver inte beräkna förstärkningen l_r .

- 5.11** En konventionell tillståndsåterkoppling har inte säkert integralverkan. Följande procedur är ett sätt att införa integralverkan. Låt det ursprungliga systemet vara

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Utvidga tillståndsvektorn med en extra komponent

$$x_{n+1} = \int^t e(\tau) d\tau = \int^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

Det system som då erhålles kan beskrivas med

$$\frac{dx_e}{dt} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C & 0 \end{pmatrix} x_e + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} r$$

där

$$x_e = \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

En tillståndsåterkoppling för detta system ger en styrlag på formen

$$u = -Lx - l_{n+1}x_{n+1} = -L_e x_e$$

Denna regulator som eftersträvar att styra y mot r har uppenbarligen integralverkan. Använd denna metodik för att bestämma en tillståndsåterkoppling med integralverkan för systemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

sådan att det slutna systemet får det karakteristiska polynomet.

$$(s + \alpha)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2) = 0$$

- 5.12** Givet systemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

Man önskar skatta tillståndsvariablerna med hjälp av modellen

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

Bestäm K så att Kalmanfiltrets poler hamnar i $s = -4$.

- 5.13** Givet ett dynamiskt system

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

Systemet har inte de önskade egenskaperna utan man vill ha ett system med polerna i -4 .

- a.** Återkoppla från samtliga tillstånd så att det återkopplade systemet får önskade egenskaper.

Övningsexempel 5. Tillståndsåterkoppling och Kalmanfiltrering

- b.** Antag att endast utsignalen y kan mätas. För att kunna använda tillståndsåterkoppling måste man skatta tillstånden x t.ex. med ett Kalmanfilter, som ger skattningen $\hat{x}$ av x . Sedan kan man använda styrlagen $u = -L\hat{x}$.

Kan man med ett Kalmanfilter åstadkomma att skattningsfelet avtar enligt det karakteristiska polynomet $(s + 6)^2$?

- c.** Kan man med ett Kalmanfilter åstadkomma att skattningsfelet avtar enligt det karakteristiska polynomet $(s + 3)^2$?

Kommentera kortfattat de erhållna resultaten.

Övningsexempel 6

Designmetoder

6.1 En PID-regulator har överföringsfunktionen

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

- a. Beräkna hur mycket regulatorn förstärker resp. fasvrider vid en given frekvens ω .
- b. För vilken frekvens har regulatorn minimal förstärkning? Vad blir förstärkningen och fasvridningen vid denna frekvens?

6.2 Processen

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

regleras med en PID-regulator med $K = 2$, $T_i = 2$ och $T_d = 0.5$. För att se inverkan av avvikelser från det inställda värdet hos PID-parametrarna skall vi ändra var och en av K , T_i och T_d med en viss faktor och se hur det påverkar dels stegsvaret (från referensvärde och från laststörning) och dels det kompenserade öppna systemets Bode-diagram. Referenssignalen består av ett enhetssteg vid $t = 0$ och laststörningen av ett negativt enhetssteg.

- a. Vi börjar med att studera vad som händer vid en fyrdubbling av respektive parameter. I Fig. 6.1 visas det nominella fallet $(K, T_i, T_d) = (2, 2, 0.5)$ (heldragna svarta kurvor) tillsammans med fallen $(8, 2, 0.5)$, $(2, 8, 0.5)$ och $(2, 2, 2)$. Para ihop de tre Bode-diagrammen och de tre stegsvaren i Fig. 6.1 med dessa tre fall.
- b. Vi studerar nu vad som händer vid en minskning av respektive parameter med en faktor 2. Det nominella fallet $(K, T_i, T_d) = (2, 2, 0.5)$ (heldragna kurvor) visas i Fig. 6.2 tillsammans med fallen $(1, 2, 0.5)$, $(2, 1, 0.5)$ och $(2, 2, 0.25)$. Para ihop de tre Bode-diagrammen och de tre stegsvaren i Fig. 6.2 med dessa tre fall.

6.3 Styrningsdynamiken hos ett fartyg kan approximativt beskrivas med

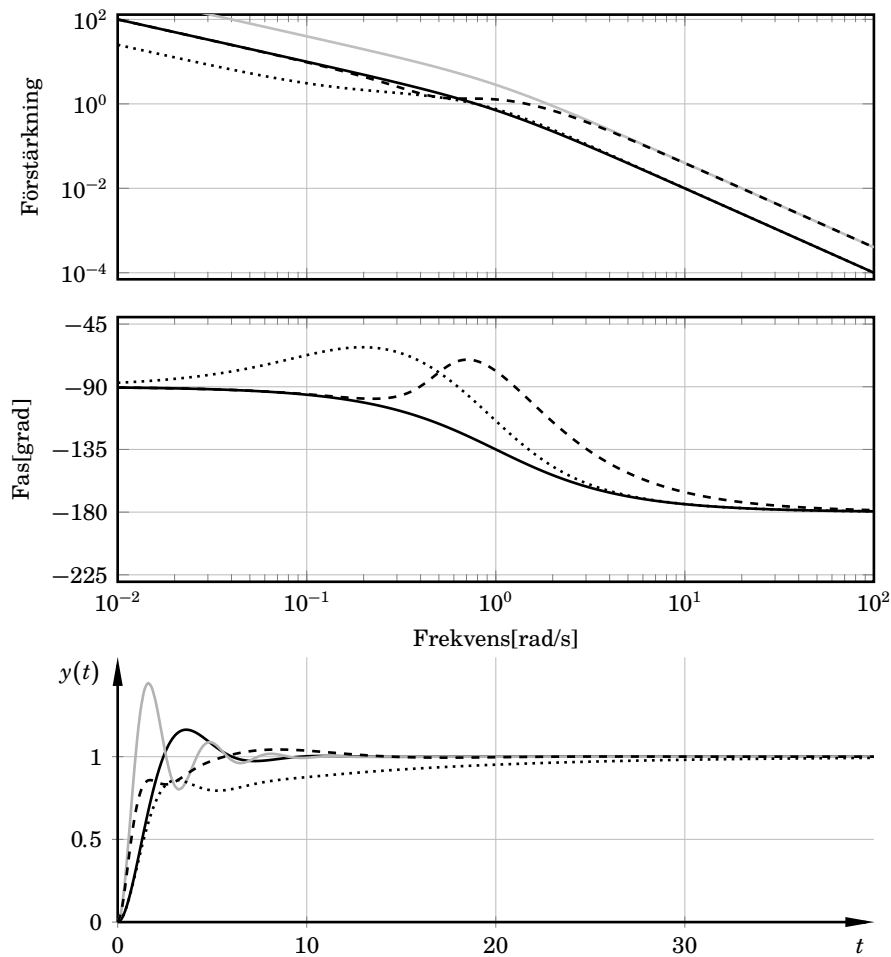
$$J \frac{dr}{dt} + Dr = C\delta$$

där r är girhastigheten [rad/s] och δ roderutslaget [rad]. Vidare är J [kgm²] tröghetsmomentet med avseende på båtens giraxel, D [Nms] är en dämpningskonstant och C [Nm/rad] en konstant som anger rodereffektivitet. Låt roderutslaget δ vara styrsignal. Ange en PI-regulator för reglering av girhastigheten sådan att det slutna systemet får den karakteristiska ekvationen

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = 0$$

6.4 En elektrisk motor kan approximativt beskrivas med differentialekvationen

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} = k_i I$$



Figur 6.1 Bodediagram och stegsvar då PID-parametrarna fyrdubblas i uppgift 6.2a. Det nominella fallet visas av de heldragna svarta kurvorna.

där J är motorns tröghetsmoment, D en dämpningskonstant och k_i dess ström-konstant. Vidare betecknar θ vridningsvinkeln och I strömmen genom motorn. Låt θ vara mätsignal och I styrsignal. Bestäm parametrarna i en PID regulator så att det slutna systemet får den karakteristiska ekvationen.

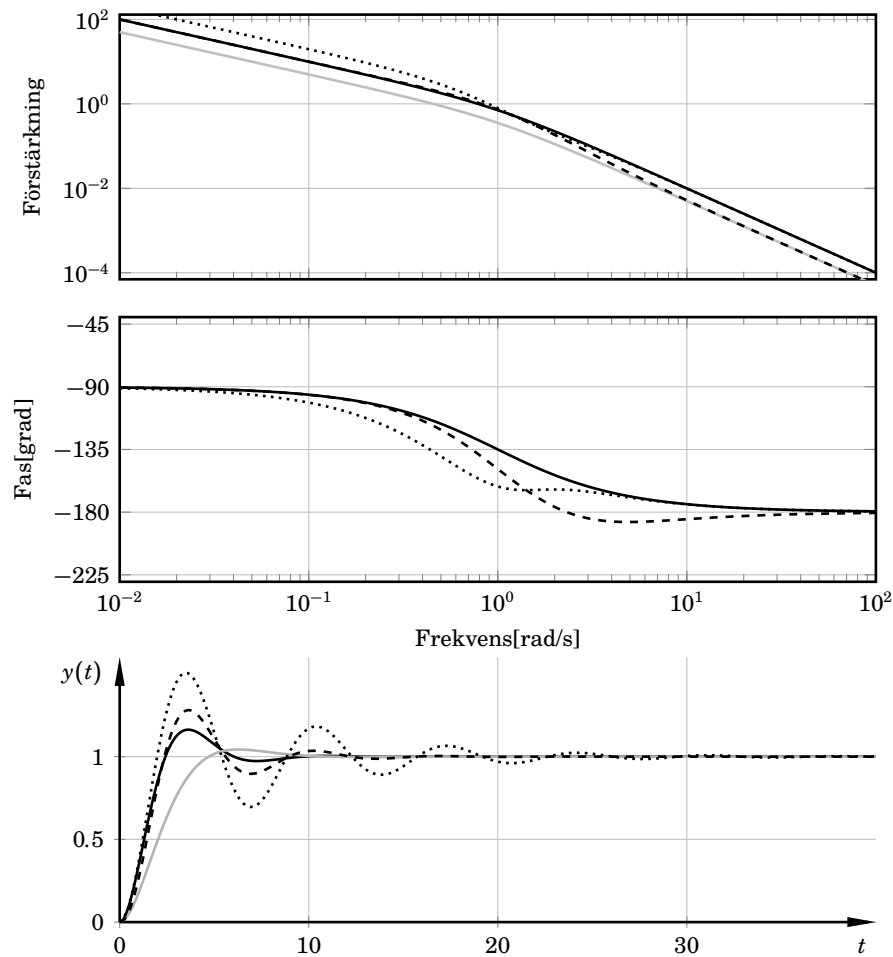
$$(s + a)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2) = 0$$

- 6.5** a. Rita Bodediagrammet för en PI-regulator (sätt $K = 1$ och $T_i = 1$).
b. Rita Bodediagrammet för en PD-regulator (sätt $K = 1$ och $T_d = 1$).
- 6.6** En cementugn består av en lång lutande och roterande cylinder. I ugnens övre ända tillföres slam, och s.k. klinkers kommer ut ur den undre änden. Nedtill finns en oljebrännare. För att få jämn produktkvalitet är det väsentligt att den s.k. brännzonttemperaturen hålls konstant. Detta åstadkommes genom att man mäter brännzonttemperaturen och reglerar bränsleflödet med PI-regulator. Ett blockschema för systemet visas i figur 6.3. Överföringsfunktionen från bränsleflöde till brännzonttemperatur är

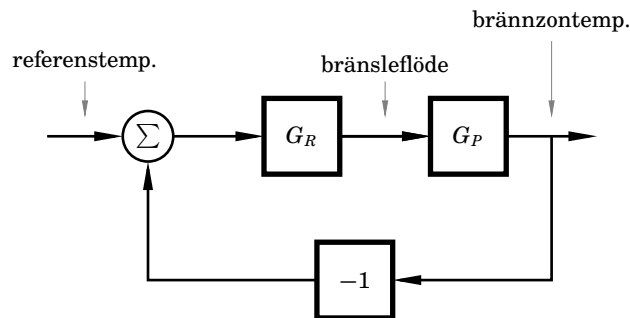
$$G_P(s) = \frac{e^{-9s}}{(1 + 20s)^2}$$

och regulatorn har överföringsfunktionen

$$G_R(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i})$$



Figur 6.2 Bode-diagram och stegsvar då PID-parametrarna halveras i uppgift 6.2 b. Det nominella fallet visas av de heldragna svarta kurvorna.



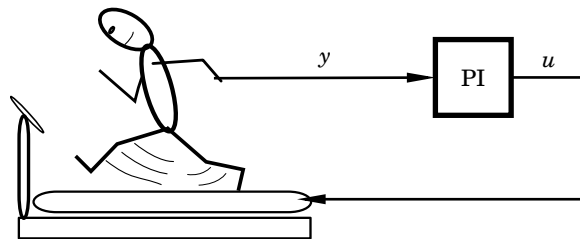
Figur 6.3 Blockschema för cementugn med temperaturregulator.

Använd Ziegler-Nichols självsvängningsmetod för att bestämma parametrarna i regulatorn.

6.7 Martin har hört att optimal träning får man när pulsen är 160 slag per minut. Genom att återkoppla signalen från hans pulsmätare till ett löpband vill han reglera hastigheten så att pulsen ligger precis på det optimala värdet.

a. Antag att dynamiken i Martins kropp approximativt beskrivs av det lineära systemet

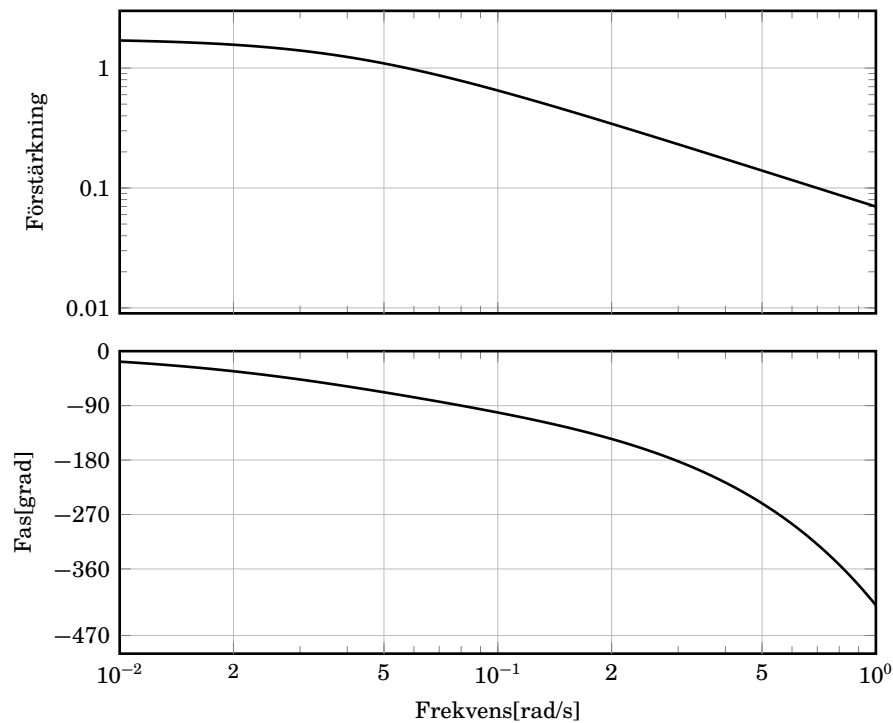
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{1}{30}x + \frac{1}{15}u \\ y &= x\end{aligned}\tag{6.1}$$



Figur 6.4 Löpband

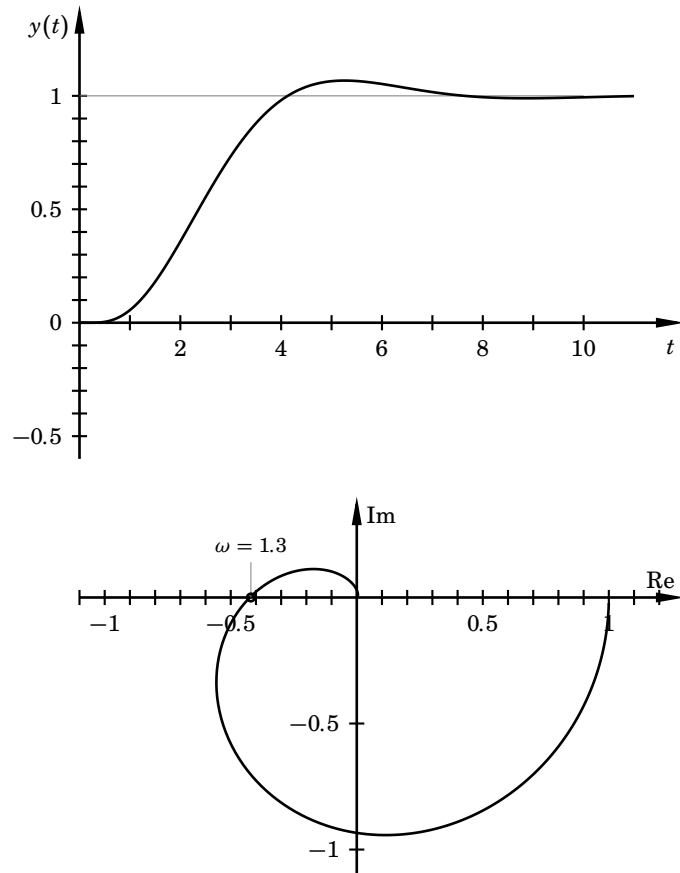
där u är löpbandets hastighet och x är pulsen i slag per minut. Designa en PI-regulator så att det slutna systemets båda poler hamnar i -0.1 .

- b. Martin har inte tillgång till modellen i ekvation 6.1. Han bestämmer sig för att ställa in sin PI-regulator med hjälp av Ziegler-Nichols frekvensmetod, även kallad självsvängningsmetod. Bodediagrammet för en mer exakt modell kan ses i figur 6.5. Vad blir regulatorparametrarna givet bodediagrammet?



Figur 6.5 Bodediagram i uppgift 6.7

- 6.8** Använd Ziegler-Nichols steg- och självsvängningsmetod för att bestämma PID-parametrar för ett system vars stegsvar respektive Nyquistkurva är givna i figur 6.6. Bestäm även en PI- och en PID-regulator med hjälp av Lambdametoden då $\lambda = T$.



Figur 6.6 Stegsvvar och Nyquistkurva för systemet i uppgift 6.8.

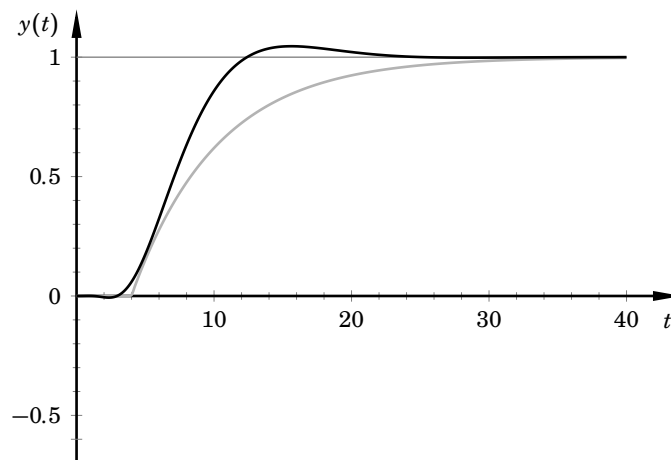
- 6.9** Betrakta ett system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-s}$$

- Rita systemets stegsvar, och använd Ziegler-Nichols stegsvarsmetod för att bestämma parametrarna för en PID regulator. Ange de värden på regulatorparametrarna K , T_i och T_d som erhålles.
- Använd Ziegler-Nichols självsvängningsmetod för att bestämma parametrarna för en PID regulator.
- Använd Lambdametoden med $\lambda = T$ för att bestämma parametrarna för en PID-regulator.

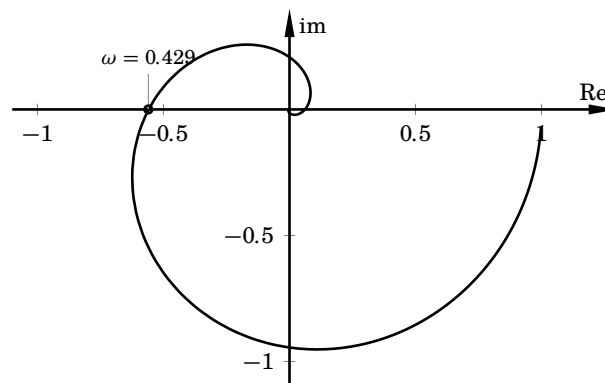
6.10 En process skall regleras med en PID-regulator utgående från Ziegler-Nichols metoder.

- a. Använd stegvarsmetoden då processens stegsvar ges av den *svarta* kurvan i figur 6.7.



Figur 6.7 Stegvar för processen i problem 6.10

- b. Samma systems Nyquist-kurva är given av figur 6.8. Den med 'o' markerade punkten svarar mot frekvensen $\omega = 0.429$. Använd självsvängningsmetoden på processen.

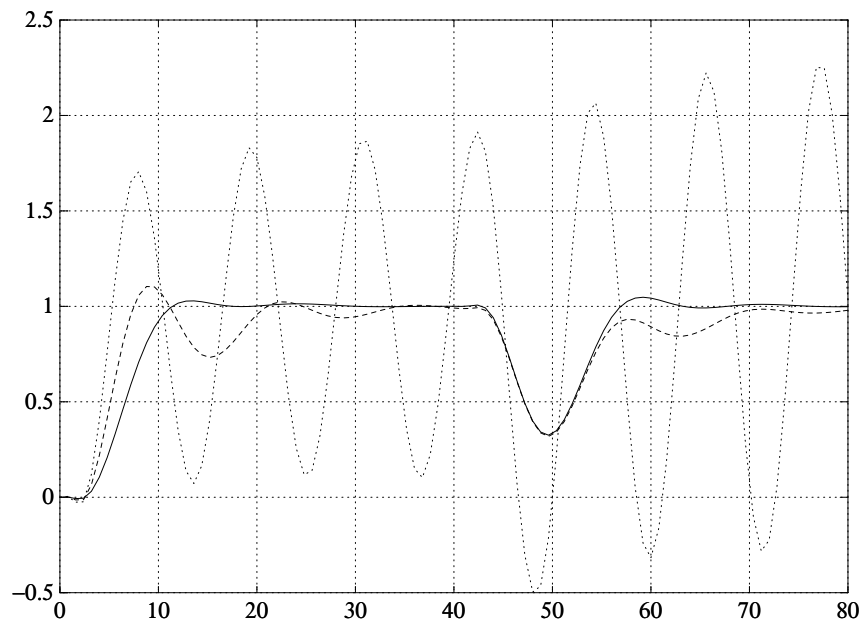


Figur 6.8 Nyquist-diagram för processen i problem 6.10

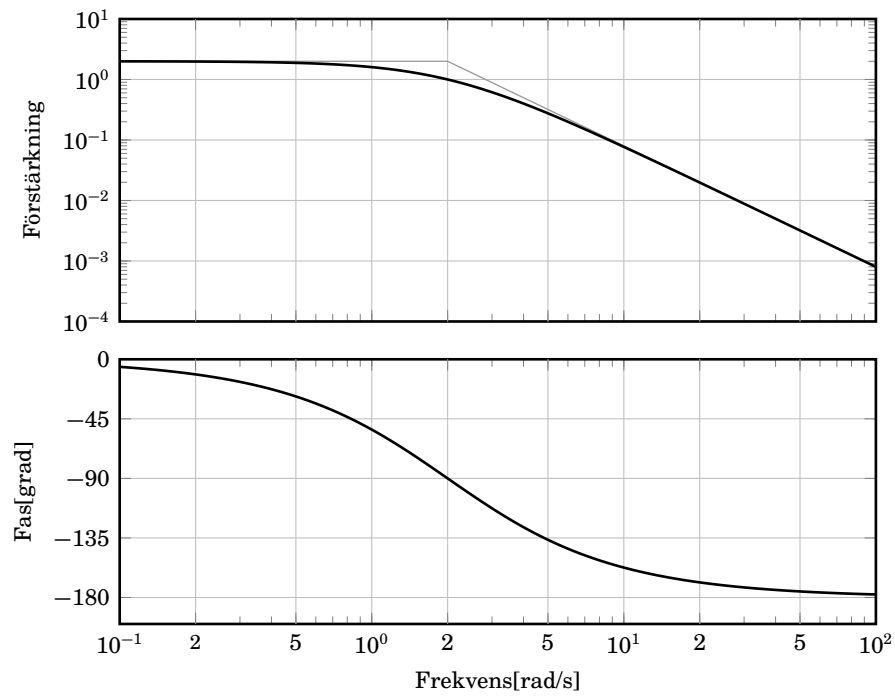
- c. Tyvärr ger stegvarsmetoden i det här fallet ett instabilt slutet system. Självsvängningsmetoden ger ett stabilt men dåligt dämpat system. Förklaringen till att stegvarsmetoden fungerar så dåligt är att den försöker approximera processen med ett tidsfördröjt första ordningens system (grå stegsvaret i figur 6.7). Genom att utnyttja mer information ur Nyquist-kurvan kan man få PID-parametrar som ger ett stegsvar som ser ut som den heldragna kurvan i figur 6.9. De båda andra stegsvaren är från självsvängningsmetoden (streckad kurva) respektive stegvarsmetoden (prickad kurva).

Hur tror du K har ändrats i den tredje metoden jämfört med Ziegler-Nichols metoder (ökat eller minskat)?

6.11 Ett andra ordningens system har ett Bodediagram enligt figur 6.10. Man vill koppla in en länk G_K i serie med systemet, så att det resulterande slutna systemets snabbhet ökar i jämförelse med det ursprungliga. Vi använder skärfrekvensen ω_c



Figur 6.9



Figur 6.10 Bodediagram för systemet i problem 6.11.

(den vinkelfrekvens där $|G_0| = 1$), som ett mått på systemets snabbhet. Vilket eller vilka G_K gör systemet snabbare ?

- A $G_K = K, K > 1$
- B $G_K = \frac{1}{s+1}$
- C $G_K = \frac{s+1}{s+2}$
- D $G_K = e^{-sL}, L > 0$

6.12 Ett system med överföringsfunktionen

$$G_P(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

återkopplas med en proportionell regulator med förstärkningen $K = 1$. Det slutna systemet får då ett reglerfel som beter sig enligt följande: $e(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ när referensvärdet är ett steg, och $e(t) \rightarrow 2, t \rightarrow \infty$ när referensvärdet är en ramp.

Dimensionera en kompenseringslänk $G_k(s)$ som tillsammans med den proportionella regulatorn minskar rampfelet till ett värde mindre än 0.2. Samtidigt får fasmarginalen minska med högst 6° .

6.13 Ett system med överföringsfunktionen

$$G_P(s) = \frac{1.1}{s(s+1)}$$

återkopplas enkelt. Det slutna systemet blir emellertid för långsamt. Dimensionera en kompenseringslänk $G_k(s)$ sådan att det enkelt återkopplade kompenserade systemet blir ungefär dubbelt så snabbt utan att robustheten försämras eller i klartext: Skärfrekvensen ω_c skall dubbleras samtidigt som fasmarginalen φ_m ej får minska.

6.14 Betrakta systemet

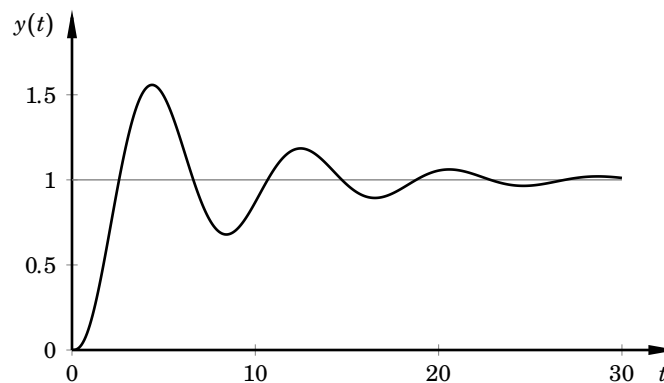
$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Vid enkel återkoppling har det slutna systemet stationära felet $e = 0$ då insignalen är ett steg ($r = 1, t > 0$), och stationära felet $e = 2$ då insignalen är en ramp ($r = t, t > 0$). Man vill ha systemet 3ggr så snabbt utan att förmågan att eliminera stationära fel blir sämre och utan att robustheten försämras. Dimensionera en kompenseringslänk $G_k(s)$ sådan att ovanstående villkor uppfylls.

6.15 Ett servosystem har kretsöverföringsfunktionen

$$G_o(s) = \frac{2.0}{s(s+0.5)(s+3)}$$

Systemet återkopplas enkelt och får ett stegsvar enligt figur 6.11. Som fram-



Figur 6.11 Stegsvaret för det återkopplade servosystemet i problem 6.15.

går av figuren är systemet dåligt dämpat och har stor översläng. Snabbheten är emellertid tillfredsställande. Det stationära felet hos det återkopplade systemet då insignalen är en ramp är $e_1 = 0.75$. Dimensionera en kompenseringslänk som ökar fasmarginalen till $\varphi_m = 50^\circ$ utan att förändra snabbheten. ($\varphi_m = 50^\circ$ ger en relativ dämpning $\zeta \approx 0.5$ vilket motsvarar en översläng $M \approx 17\%$). Rampfelet hos det kompenserade systemet får ej vara större än $e_1 = 1.5$.

6.16 Betrakta ett enkelt återkopplat system med kretsöverföringen

$$G_1(s) = \frac{1.5}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

För systemet gäller att lösningstiden (5%) $T_s = 8.0$ s, överslängen $M_o = 27\%$ och stationära felet vid ramp ($u(t) = t$) är $e_1 = 1.33$.

Dimensionera en fasretarderande kompensering

$$G_k(s) = K \frac{s + a}{s + a/M}$$

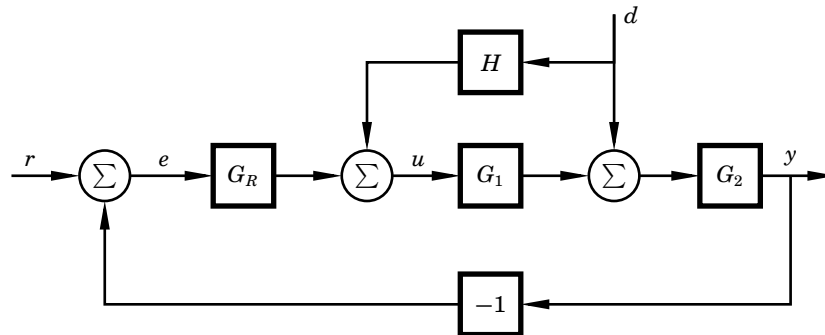
sådan att det stationära rampfelet för det slutna systemet minskas till $e_1 = 0.1$ samtidigt som snabbhet och dämpning (robusthet) väsentligen bibehålls.

Övningsexempel 7

Regulatorstrukturer

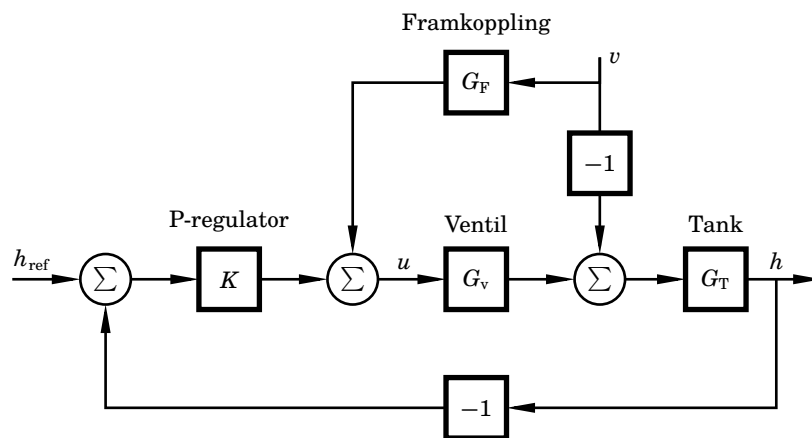
7.1 Figur 7.1 visar ett blockschema för temperaturregleringen av ett hus. Referenstemperaturen (termostatinställningen) ges av r , utsignalen y är inomhustemperaturen och störningen d beror av utomhustemperaturen. Överföringsfunktionen $G_1(s)$ representerar dynamiken för värmepanna och element och $G_2(s)$ representerar dynamiken för luften inuti huset. Regulatorn G_R är en P-regulator med förstärkningen $K = 1$.

Antag att utomhustemperaturens inverkan d kan mätas exakt. Bestäm framkopplingen H så att inomhustemperaturen blir oberoende av utomhustemperaturen. Vad fordras för att framkopplingen skall ge bra resultat?



Figur 7.1 Blockschema för temperaturreglering av hus.

7.2 Figur 7.2 visar ett blockschema för ett nivåregleringssystem för en tank i en fabrik. Inflödet till tanken, $x(t)$, kommer från en bufferttank och kan styras med hjälp av en ventil. En pump bestämmer utflödet $v(t)$ av vätska ur tanken efter vad som behövs för produktionen i fabriken. Målet med regleringen är att hålla nivån h i tanken konstant trots stora variationer i utflödet. Detta görs genom att justera ventilen för utflödet från bufferttanken.



Figur 7.2 Blockschema för nivåreglersystem i problem 7.2.

Tankens area är $A = 1 \text{ m}^2$.

Ventilens överföringsfunktion från ventilpådrag till flöde är

$$G_v(s) = \frac{1}{1 + 0.5s}$$

Tankens dynamik kan bestämmas med en enkel massbalans.

- Antag att $G_F = 0$, d.v.s. att vi inte har någon framkoppling. Dimensionera en P-regulator så att det slutna systemet får karakteristiska polynomet $(s + \omega)^2$. Hur stor blir ω ? Vad blir det stationära felet hos nivån vid en stegändring i $v(t)$ på 0.1?
- Dimensionera en PI-regulator så att det stationära reglerfelet vid laststörningar försvinner. Bestäm regulatorparametrarna så att det slutna system får karakteristiska polynomet $(s + \omega)^3$. Hur stor blir ω ?
- För att ytterligare minska inverkan av laststörningar inför vi en framkoppling baserad på en mätning av $v(t)$. Bestäm en framkopplingslänk G_F som eliminerar inverkan av variationer i inflödet genom att korrigera $x(t)$.

Anmärkning:

Då alla variabler betecknar avvikelser från arbetspunkten kan referensvärdet för nivån h sättas lika med noll.

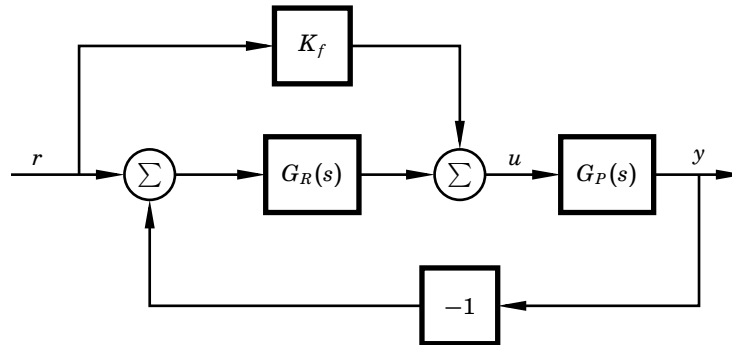
7.3 Betrakta systemet i figur 7.3. Processens överföringsfunktion är

$$G_P(s) = \frac{1}{s + 3}$$

och $G_R(s)$ är en PI-regulator med överföringsfunktionen

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

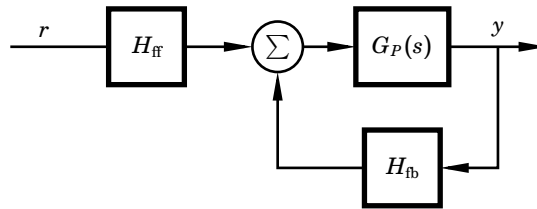
K_f är en konstant framkoppling från referenssignalen r .



Figur 7.3 Blockschemat till uppgift 7.3.

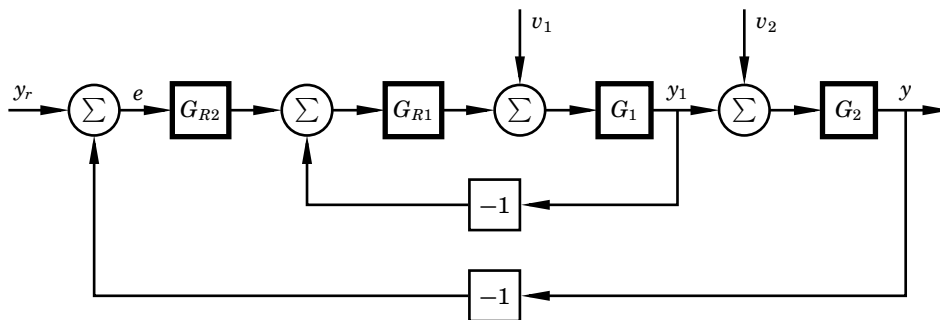
- Sätt $K_f = 0$ och bestäm K och T_i så att det slutna systemets poler hamnar i $-2 \pm 2i$, vilket bedöms ge god reglering av störningar.
- Diskutera framkopplingens inverkan på systemets reaktion på börvärdesändringar. I det slutna systemets överföringsfunktion uppträder ett nollställe. Ta bort detta genom att välja den konstanta framkopplingen K_f lämpligt.

7.4 Systemet i uppgift 7.3 kan beskrivas med ett ekvivalent blockschema enligt figur 7.4. Ange överföringsfunktionerna $H_{ff}(s)$ och $H_{fb}(s)$. Diskutera resultatet och fundera på framkopplingens inverkan då regulatorn även innehåller en D-term.



Figur 7.4 Ekvivalent blockschema för uppgift 7.3.

- 7.5** Blockschemat i Fig. 7.5 visar kaskadreglering av en tank. Överföringsfunktionen G_1 beskriver en ventil och överföringsfunktionen G_2 beskriver tankens dynamik. Målet är att reglera nivån i tanken (y). Detta görs genom att reglera ventilen (G_1) i en inre reglerloop medan y regleras i en yttre reglerloop. De båda reglerlooparna kombineras på så sätt att referensvärdet i den inre loopen utgörs av utsignalen från regulatorn i den yttre loopen. Det förutsätts att G_1 och G_2 saknar poler och nollställen i origo.



Figur 7.5 Kaskadkoppling i uppgift 7.5.

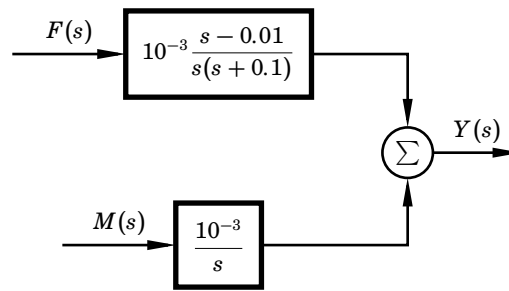
Två störningar finns i systemet, nämligen ett störflöde (v_2) som adderas till det styrda flödet (y_1) och tryckvariationer i flödet framför ventilen (v_1). Diskutera val av regulator (P eller PI) i respektive loop med avseende på eliminering av stationära reglerfel vid stegändringar i de två störningarna v_1 och v_2 .

- 7.6** Antag i Fig. 7.5 att $G_1(s) = \frac{2}{s+2}$ beskriver en ventil och $G_2(s) = \frac{1}{s}$ en tank.
- Beräkna en P-regulator $G_{R1}(s) = K_1$ sådan att den inre reglerkretsen blir 5 gånger så snabb som den oreglerade ventilen.
 - Beräkna en PI-regulator $G_{R2}(s) = K_2(1 + \frac{1}{T_i s})$ för den yttre loopen så att det slutna systemets poler hamnar en faktor 10 närmare origo än polen för den inre reglerkretsen. Approximera den inre loopen med $G_{\text{inre}}(s) \approx G_{\text{inre}}(0)$.
- 7.7** I en ångpanna av s.k. domtyp användes en behållare, domen, för att skilja vatten och ånga (se figur 7.6). Det är väsentligt att hålla konstant nivå i domen vid belastningsförändringar. Domen kan beskrivas med följande modell:

$$Y(s) = \frac{10^{-3}}{s} M(s) + \frac{s - 0.01}{s(s + 0.1)} 10^{-3} F(s)$$

där Y är domnivån i m, M är matarvattenflödet i kg/s och F är ångflödet i kg/s.

- Antag att ångflödet är konstant. Dimensionera en P-regulator, som styr matarvattenflödet från en mätning av domnivån. Välj regulatorns parametrar så att reglerfelet p.g.a en stegstörning i nivån efter 10 sekunder sjunkit till 10 % av felets initialvärde.
- Ange för det återkopplade systemet det stationära felet i nivån Y efter en stegstörning i ångflödet F på 1 kg/s.



Figur 7.6 Blockschema för ångpanna av domtyp.

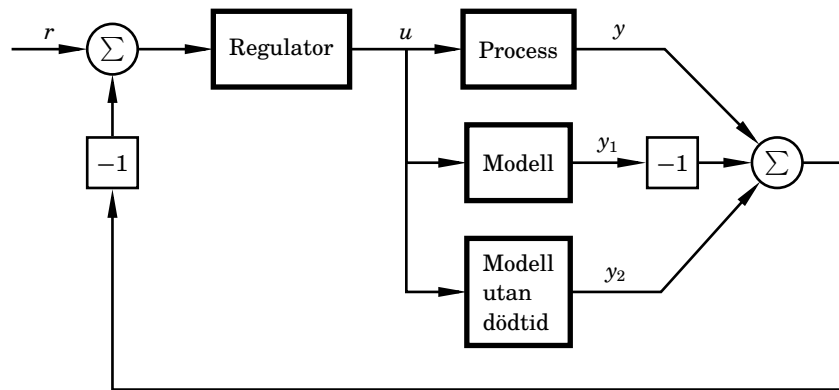
- c. Bestäm för det ursprungliga systemet en framkoppling $H(s)$ från ångflöde $F(s)$ till matarvatten $M(s)$, så att nivån Y blir oberoende av ändringar i ångflödet.

7.8 Antag att en servomotor,

$$G_P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

regleras med en P-regulator, $G_R(s) = 2$. Vad är systemets dödtidsmarginal?

7.9 Antag samma process och regulator som i föregående uppgift, men att processen nu styrs över ett mycket långsamt nätverk som introducerar en tidsfördröjning på en sekund i reglerkretsen. För att avhjälpa detta problem används en Otto Smith-regulator, se figur 7.7.



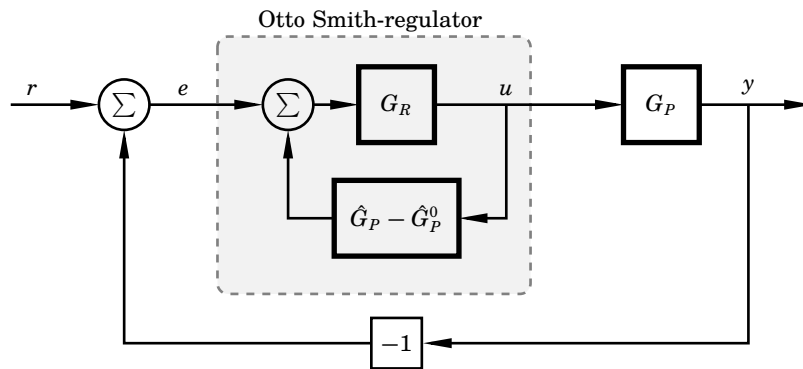
Figur 7.7 Principen för Otto Smith-regulatorn.

- a. Antag att modellen är identisk med processen. Vad är överföringsfunktionerna för de olika blocken (*Regulator*, *Process*, *Modell*, *Modell utan dödtid*) i vårt exempel?
- b. Blockdiagrammet för Otto Smith-regulatorn kan ritas om enligt figur 7.8. Vad blir Otto Smith-regulatorns överföringsfunktion (från e till u) i vårt exempel?
- c. Använd approximationen $e^x \approx 1 + x$ för att förenkla regulatorns överföringsfunktion. Jämför regulatorn med kompenseringslänkar.

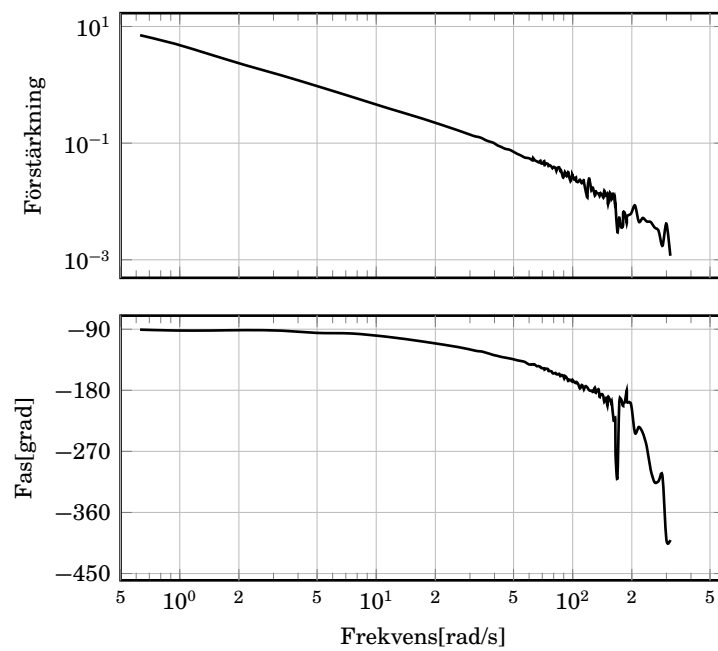
7.10 I figur 7.9 visas resultatet av en frekvensanalys gjord på bommen (en del av "kulan-på-bommen"-processen). Man ser att processen för låga frekvenser har en dynamik som kan approximeras väl av en integrator. Man ser också att faskurvan för höga frekvenser avviker på ett sätt som liknar en dödtid. Processen skulle alltså kunna beskrivas av

$$G(s) = \frac{k}{s} e^{-sL}$$

Använd Bodediagrammet för att bestämma ungefärliga värden på förstärkningen k och dödtiden L .



Figur 7.8 Blockdiagram ekvivalent med figur 7.7.



Figur 7.9 Uppmätt Bodediagram för bommen.

Övningsexempel 8

Några designexempel

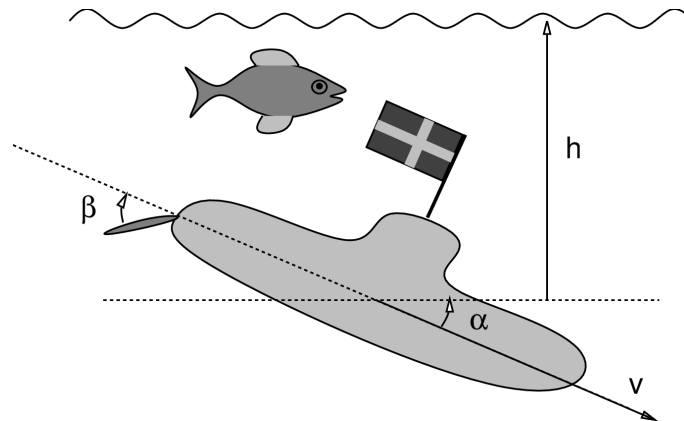
8.1 Djupstyrning av ubåt

Syfte

Denna uppgift handlar om djupreglering av ubåtar på 40-talet. Två olika typer av reglering testas — PD-reglering och tillståndsåterkoppling. Den senare metoden användes i verkligheten.

Bakgrund

Djupstyrning av ubåtar kan göras mha variation av rodervinkeln β enligt Fig. 8.1. Djupet h avläses på manometer. Genom att manuellt generera en sinussignal



Figur 8.1 Djupstyrning av ubåt i problem 8.1.

i rodervinkeln β (efter tabell och klocka — detta gjordes nämligen i slutet av 1940-talet) kan man via frekvensanalys skatta överföringsfunktionen $G(s)$ (för en konstant hastighet v) från β till h . Det resulterande Bodediagrammet för tre olika hastigheter presenteras i Fig. 8.2.

Specifikationer

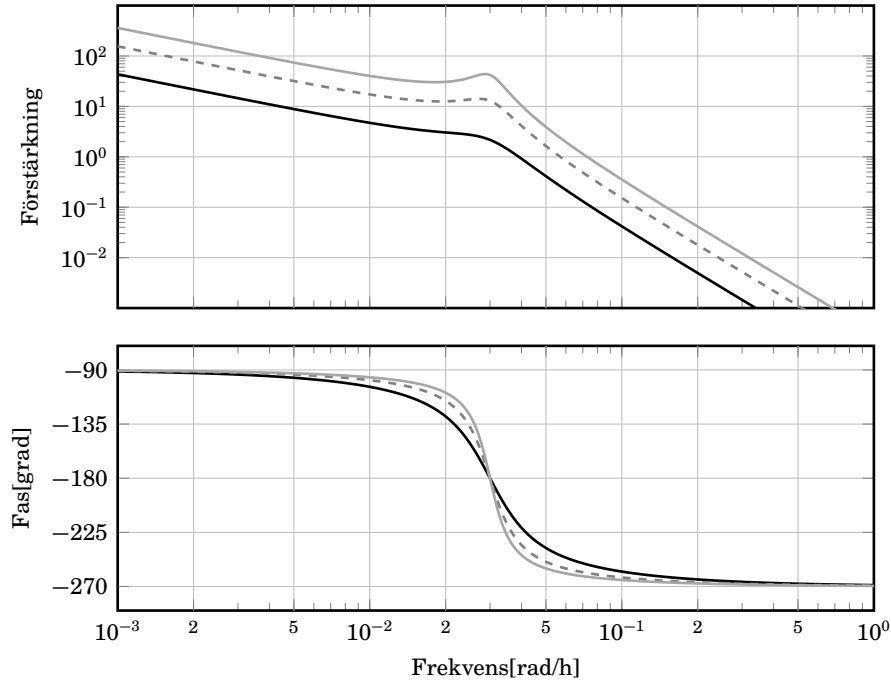
I detta fall gavs inga andra specifikationer än "Gör det så bra ni kan".

Problemformulering

Antag att hastigheten $v = 3$ knop. Problemet består i att beräkna en styrlag som ger ett tillfredsställande insvängningsförlopp för djupet h vid just denna hastighet. Detta ger ingen garanti för att insvängningen skall vara lika trevlig vid någon annan hastighet.

I en första ansats vill man styra ubåtens djup h genom att enbart mäta h .

- Hur stor får förstärkningen K högst vara för att slutna systemet skall vara stabilt då man använder en P-regulator $\beta = K(h_{\text{ref}} - h)$ (använd Bodediagrammet i Fig. 8.2)?



Figur 8.2 Bodediagram för den skattade överföringsfunktionen $G(s)$ från β [grader] till h [meter] i problem 8.1 för hastigheterna $v = 3$ knop (heldragna svarta kurvor), 5 knop (streckade kurvor) och 7 knop (gråa kurvor).

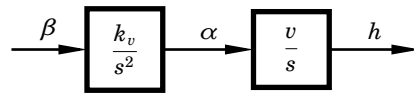
- b. Med en PD-regulator $G_r(s) = K(1 + T_D s)$ vill man erhålla en skärfrekvens på $\omega_c = 0.03$ rad/s. Hur ska K och T_D väljas om fasmarginalen ϕ_m skall vara 60° ?
- c. Hur påverkas stabiliteten hos det slutna systemet i (b) om hastigheten ökar från 3 till 7 knop? Föreslå olika sätt att ta hänsyn till hastighetsvariationer.

För vinkelfrekvenser över 0.05 rad/s kan man göra approximationen

$$G_{\alpha\beta}(s) = \frac{k_v}{s^2} \quad (8.1)$$

$$G_{h\alpha}(s) = \frac{v}{s} \quad (8.2)$$

där $G_{\alpha\beta}(s)$ och $G_{h\alpha}(s)$ är överföringsfunktionerna från β till α resp. från α till h (Fig. 8.3). Konstanten k_v beror av hastigheten v .



Figur 8.3 Blockschema för en ubåtsmodell som är giltig för $\omega > 0.05$ rad/s.

- d. Bestäm k_v med hjälp av Bodediagrammet i Fig. 8.2. (1 knop ≈ 1.852 km/h = $1.852/3.6 \approx 0.514$ m/s.)
- e. Antag att den approximativa modellen

$$G_{h\beta}(s) = \frac{k_v v}{s^3}$$

regleras med en P-regulator $\beta = K(h_{ref} - h)$. Avgör för vilka värden på K det återkopplade systemet är asymptotiskt stabilt. Stämmer detta med resultatet som erhöles i (a)?

Genom att även återkoppla från trimvinkeln α och dess derivata $d\alpha/dt$ kan man förbättra prestanda för reglersystemet.

- f. Inför tillstånden $x_1 = d\alpha/dt$, $x_2 = \alpha$ och $x_3 = h$ samt insignalen $u = \beta$. Använd styrlagen $u = u_r - l_1 x_1 - l_2 x_2 - l_3 x_3 = u_r - Lx$ och bestäm L så att det slutna systemets karakteristiska ekvation blir

$$(s + \gamma\omega_0)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2) = 0$$

- g. Referensvärdet h_{ref} för höjden h införs enligt

$$u_r = L_r h_{\text{ref}}$$

Hur skall L_r väljas för att $h = h_{\text{ref}}$ stationärt?

Man bestämde sig för att välja $\zeta = 0.5$ och $\gamma = 2$ vilket bedömdes ge ett lagom dämpat stegsvar. Valet av ω_0 kräver lite mer eftertanke. Eftersom den approximativa modellen (8.1) bara är giltig för $\omega > 0.05$ rad/s så bör inte ω_0 väljas för låg. Å andra sidan får inte ω_0 väljas för hög eftersom man då kan få för stora roderutslag p.g.a. stora värden på koefficienterna l_j , $j = 1, 2, 3$.

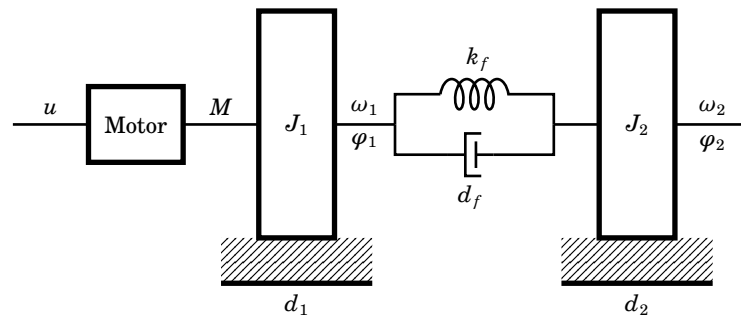
- h. Hur stort ω_0 kan man högst välja om en stegstörning i manometersignalen motsvarande $\Delta h = 0.1$ m inte får ge upphov till större initialt roderutslag än 5° ?

I det aktuella fallet valde man $\omega_0 = 0.1$ rad/s. Man provade först ett halvautomatiskt system. Signalen $u = u_r - l_1 x_1 - l_2 x_2 - l_3 x_3$ visades för en operatör som hade i uppgift att manuellt hålla signalen noll med hjälp av det vanliga roderservot. Regleringen fungerade mycket tillfredställande. Inställningstider på 30 – 60 s erhöles i hela fartområdet. Det kompletta automatiska systemet provades sedan på ubåten Sjöborren. Noggrannheten vid gång i lugnt väder var ± 0.05 m!

8.2 Reglering av elastiskt servo

Syfte. Uppgiften går ut på att reglera vinkelhastigheten hos ett svänghjul som är kopplat med en vek axel till ett annat svänghjul vilket i sin tur drivs av en motor. Olika reglerstrategier provas och jämförs med avseende på prestanda.

Bakgrund. I Fig. 8.4 visas en förenklad modell av ett elastiskt servo. Den skulle även kunna utgöra en modell av en vek robotarm eller ett elastiskt antennsystem på en satellit. Vridningsvinklarna hos svänghjulen betecknas med φ_1 resp. φ_2 me-



Figur 8.4 Modell av elastiskt servo i uppgift 8.2.

dan $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$ och $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$ betecknar motsvarande vinkelhastigheter. Svänghjulen har tröghetsmomenten J_1 resp. J_2 och de är kopplade med en axel som har fjäderkonstant k_f och dämpkonstant d_f . Det förekommer också en del lagerfriktion vilken representeras av dämpkonstanterna d_1 och d_2 . Det ena svänghjulet drivs av en DC-motor med järnlös rotor som drivs av en strömåterkopplad förstärkare. Dynamiken i motorn och i förstärkaren försummas. Motorns vridmoment är proportionellt mot förstärkarens inspanning u enligt

$$M = k_m \cdot I = k_m k_i u$$

Övnings exempel 8. Några designexempel

där I är strömmen i rotorlindningen. Momentjämvikter kring svänghjulen ger följande ekvationer.

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = -k_f(\varphi_1 - \varphi_2) - d_1 \omega_1 - d_f(\omega_1 - \omega_2) + k_m k_i u \\ J_2 \dot{\omega}_2 = +k_f(\varphi_1 - \varphi_2) - d_2 \omega_2 + d_f(\omega_1 - \omega_2) \end{cases}$$

Vi inför tillståndsvariablerna

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1 \\ x_2 = \omega_2 \\ x_3 = \varphi_1 - \varphi_2 \end{cases}$$

och betraktar vinkelhastigheten ω_2 som utsignal:

$$y = k_{\omega_2} \cdot \omega_2$$

Detta ger oss följande tillståndsmodell för servot.

$$\begin{aligned} \dot{x} = Ax + Bu &= \begin{pmatrix} -\frac{d_1 + d_f}{J_1} & \frac{d_f}{J_1} & -\frac{k_f}{J_1} \\ \frac{d_f}{J_2} & -\frac{d_f + d_2}{J_2} & \frac{k_f}{J_2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{k_m k_i}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = Cx &= \begin{pmatrix} 0 & k_{\omega_2} & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

För en verklig labprocess har vi mätt och uppskattat följande värden på konstanter och koefficienter.

$$J_1 = 22 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$$

$$J_2 = 65 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$$

$$k_f = 11.7 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/rad}$$

$$d_f = 2e - 5$$

$$d_1 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Nm/rad/s}$$

$$d_2 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Nm/rad/s}$$

$$k_m = 0.1 \text{ Nm/A}$$

$$k_i = 0.027 \text{ A/V}$$

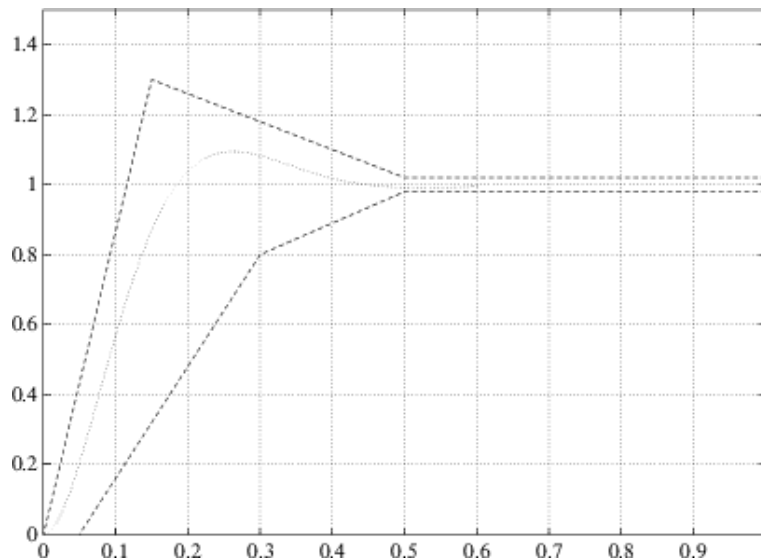
$$k_{\omega_1} = k_{\omega_2} = 0.0167 \text{ V/rad/s}$$

Problemformulering

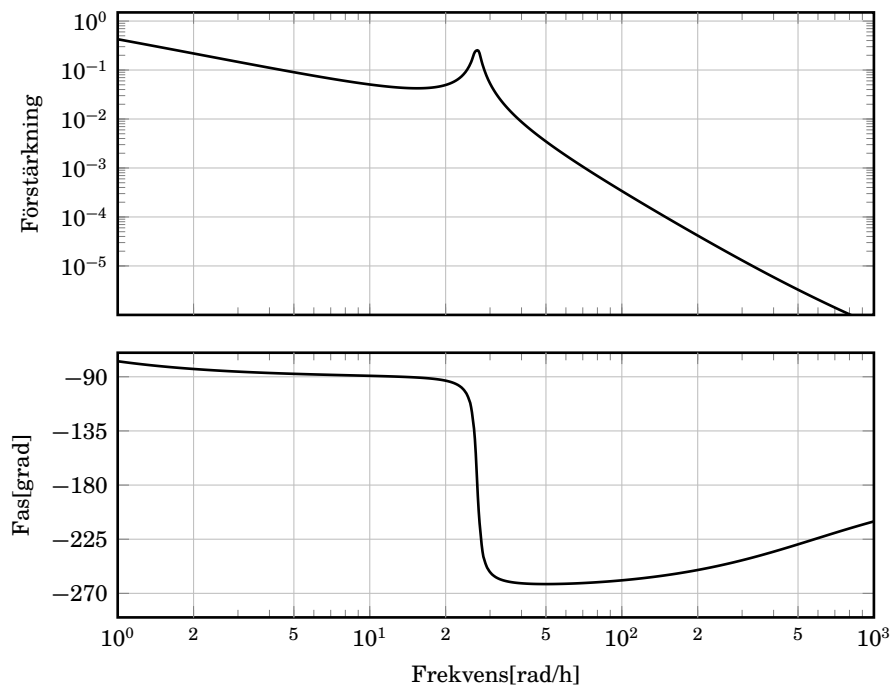
Insignalen är spänningen u till motorn och vi vill reglera vinkelhastigheten ω_2 hos det yttre svänghjulet. Målet är att snabbt kunna ställa in ω_2 till ett nytt värde samtidigt som reglersystemet inte får vara alltför känsligt för laststörningar och mätbrus. Systemet måste också dämpas så att inte insvängningen blir alltför oscillativ.

Specifikationer

1. Stegsvaret för slutna systemet skall vara ganska väl dämpat och ha en stigtid på 0.1 – 0.3 s. Insvingningstiden till $\pm 2\%$ får vara högst 0.5 s. Ett sätt att grafiskt specificera stegsvaret återges i Fig. 8.5.
2. Laststörningar får inte ge något statiskt fel.
3. Bruskänsligheten får inte vara för stor.



Figur 8.5 Det slutna systemets stegsvar skall ligga mellan de streckade kurvorna.



Figur 8.6 Bodediagram för servo.

Ziegler-Nichols metod

Bodediagrammet för överföringsfunktionen från u till ω_2 återfinns i Fig. 8.6.

- Använd Ziegler-Nichols självsvängningsmetod för att ta reda på lämpliga PID-parametrar.

Ziegler-Nichols metod ger oftast ett ganska oscillativt slutet system men de erhållna parametrarna utgör ofta hyfsade startvärden om man manuellt vill justera fram bra PID-parametrar.

Tillståndsåterkoppling och Kalmanfiltrering

Om alla tillstånden går att mäta så kan man genom återkoppling

$$u(t) = -Lx(t) + L_r y_r(t)$$

placera det slutna systemets poler godtyckligt under förutsättning att systemet är styrbart.

- b. Bestäm förstärkningen L_r så att slutna systemet får stationär förstärkning = 1, dvs $y = y_r$ stationärt.

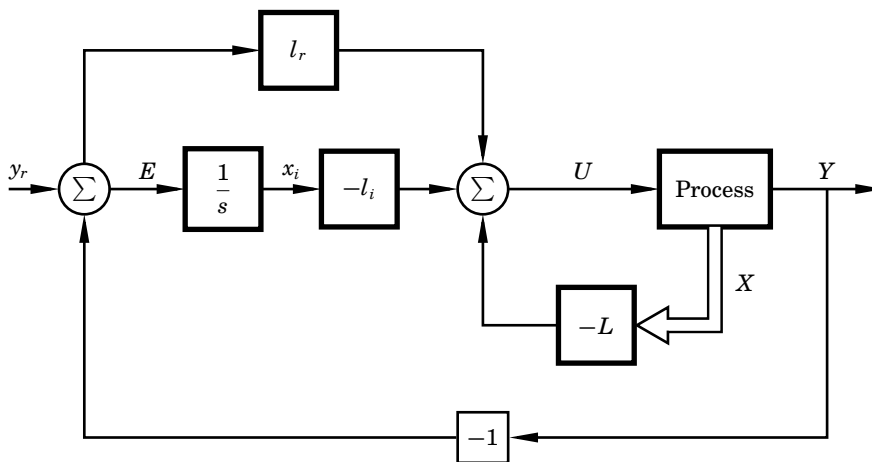
För att uppfylla Specifikation 2 så måste man även ha integration i regulatorn. Ett sätt att åstadkomma detta är att använda styrlagen

$$u(t) = -Lx(t) + L_r y_r(t) - L_i \int_{-\infty}^t (y(s) - y_r(s)) ds$$

Detta kan tolkas som återkoppling från ett "extratillstånd x_i enligt

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y - y_r \\ u = -Lx + L_r y_r - L_i x_i \end{cases}$$

I Fig. 8.7 visas ett blockschema för hela systemet.



Figur 8.7 Blockschema för tillståndsåterkoppling i uppgift 8.2.

- c. Hur ser den utvidgade tillståndsmodellen ut? Inför beteckningen x_e för den utökade tillståndsvektorn.

Eftersom tillstånden i själva verket inte går att mäta så får man rekonstruera dem på något sätt. Ett vanligt sätt är att använda ett Kalmanfilter enligt

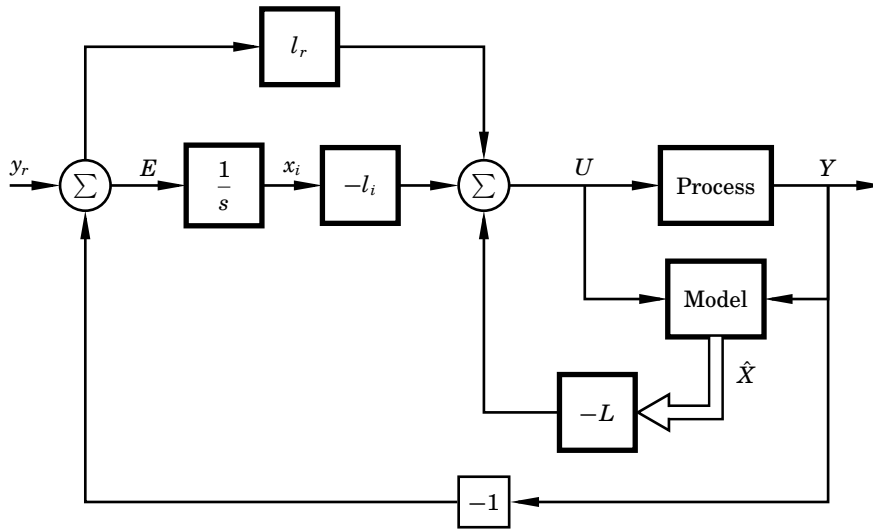
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

och sedan återkoppla från de skattade tillstånden $\hat{x}$

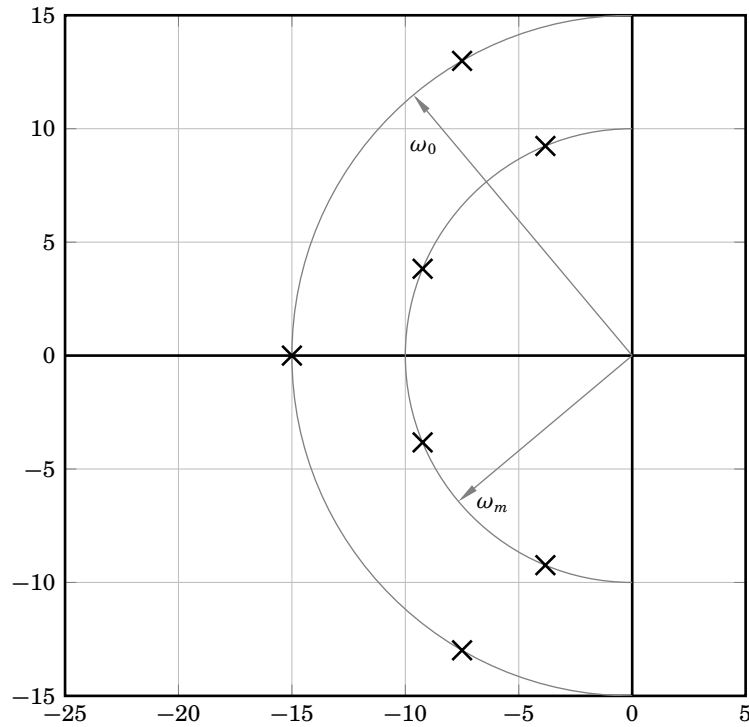
$$u = -L\hat{x} + L_r y_r - L_i x_i$$

Det är ju onödigt att skatta x_i eftersom vi har direkt tillgång till detta tillstånd. Blockschemat för hela systemet framgår av Fig. 8.8. Låt L' beteckna den utvidgade radmatrisen $(L \ L_i)$ och kalla de utvidgade systemmatriserna för A' och B' . Problemet består nu i att finna lämpliga L , L_i och K genom att placera dels egenvärdena till $A' - B'L'$ och dels egenvärdena till $A - KC$ på lämpliga ställen. Eftersom de båda egenvärdesproblemen är av lite för hög dimension för att det skall vara njutbart att räkna för hand så använder vi Matlab för att undersöka några olika val av polplaceringar.

För att inte få alltför många parametrar att variera bestämmer vi oss för att placera polerna i s.k. Butterworth-mönster vilket innebär att polerna är jämnt utspridda på en halvcirkel i vänster halvplan. Egenvärdena till $A' - B'L'$ placerar



Figur 8.8 Blockschemata för Kalmanfiltrering med tillståndsåterkoppling i uppgift 8.2.



Figur 8.9 Polplacering i uppgift 8.2.

vi på en halvcirkel med radie ω_m medan egenvärdena till $A - KC$ placeras på en halvcirkel med radie ω_o (se Fig. 8.9). Ett lämpligt ω_m kan man erhålla från Specifikation 1 dvs att insvängningstiden T_s till 2% från stationärt värde måste vara mindre än 0.5 s. En grov uppskattning av T_s för ett andra ordningens system med relativ dämpning ζ och naturlig frekvens ω är

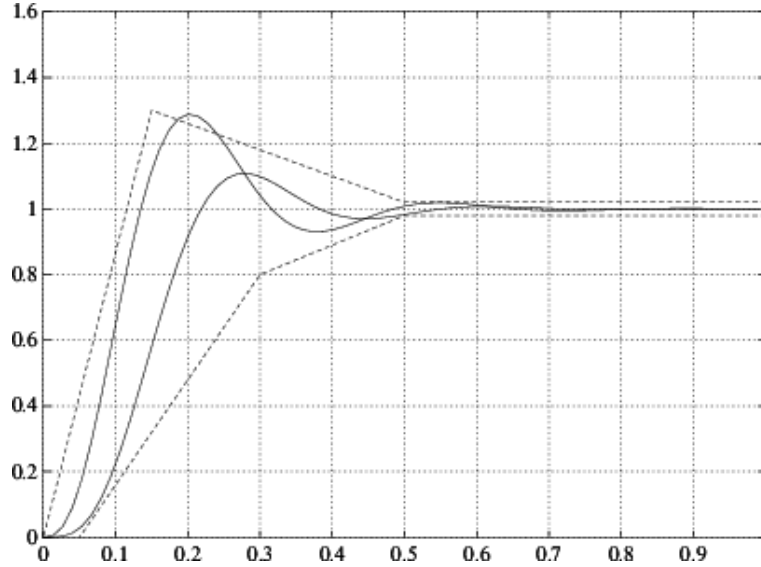
$$T_s \approx -\frac{\ln \epsilon}{\zeta \omega}$$

där ϵ är maximala avvikelsen från slutvärdet. Eftersom vi har ett 4:e ordningens system så kan vi inte använda denna approximation direkt men om man bara tittar på det minst dämpade polparet ($\zeta = 0.38$ och $\omega = \omega_m$) i Fig. 8.9 så får man att

$$\omega_m \approx -\frac{\ln \epsilon}{T_s \zeta} \quad (8.3)$$

d. Vilket värde på ω_m erhålles ur formel (8.3)?

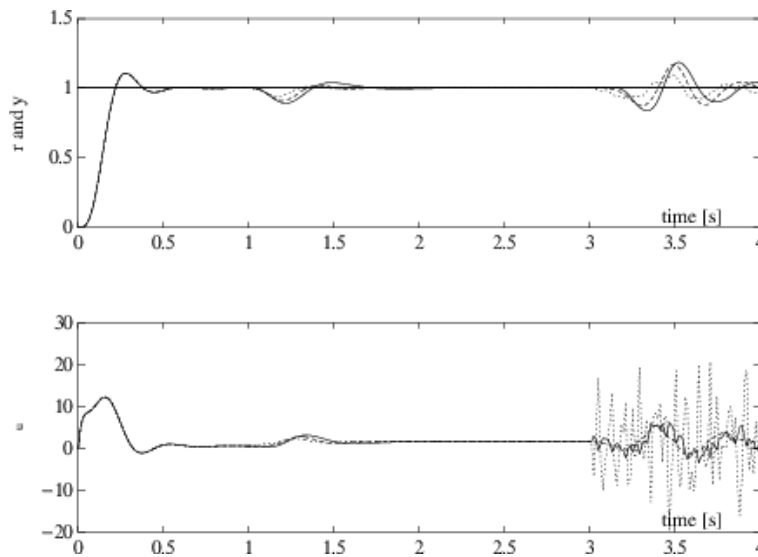
Vi väljer ω_m till 20 vilket ger $T_s < 0.5$ s. Eftersom vi har integralverkan i regulatorn så kan vi sätta $L_r = 0$ eftersom stationära förstärkningen för slutna systemet ändå blir 1. I Fig. 8.10 visas slutna systemets stegsvar då $L_r = 0$ resp. L_r valt enligt uppgift (b) ovan. Genom att sätta $L_r = 0$ minskas överslängen så



Figur 8.10 Stegsvaren för slutna systemet med $\omega_m = 20$ rad/s. För stegsvaret med störst översläng är L_r valt enligt uppgift (b) medan det andra stegsvaret svarar mot $L_r = 0$.

att specifikationen uppfylls.

Vi fixerar nu ω_m och varierar ω_o . Följande test skall användas. Vid tiden $t = 0$ kommer ett enhetssteg i referensvärdet y_r , vid $t = 1$ introduceras en laststörning $d = -1$ i styrsignalen och vid $t = 3$ dyker det plötsligt upp mätbrus i y . Bruset har variansen 0.01. Resultatet framgår av Fig. 8.11.



Figur 8.11 Test av reglering då $\omega_m = 20$ och $\omega_o = 10$ (heldragna kurvor), 20 (streckade kurvor) och 40 (prickade kurvor).

- e. Vilket värde på ω_o verkar vara bäst när det gäller att eliminera laststörningen?
Vilket ω_o är bäst när det gäller att dämpa mätbruset?

Övningsexempel 9

Interaktiv jämförelse mellan modellbeskrivningar

Det finns många sätt att beskriva dynamiken hos processer och reglersystem, t.ex. stegsvar, överföringsfunktioner, tillståndsbeskrivning, pol-nollställediagram, Bodediagram och Nyquistdiagram. Ett bra sätt att lära sig sambandet mellan olika beskrivningar är att använda interaktiva hjälpmedel. På hemsidan

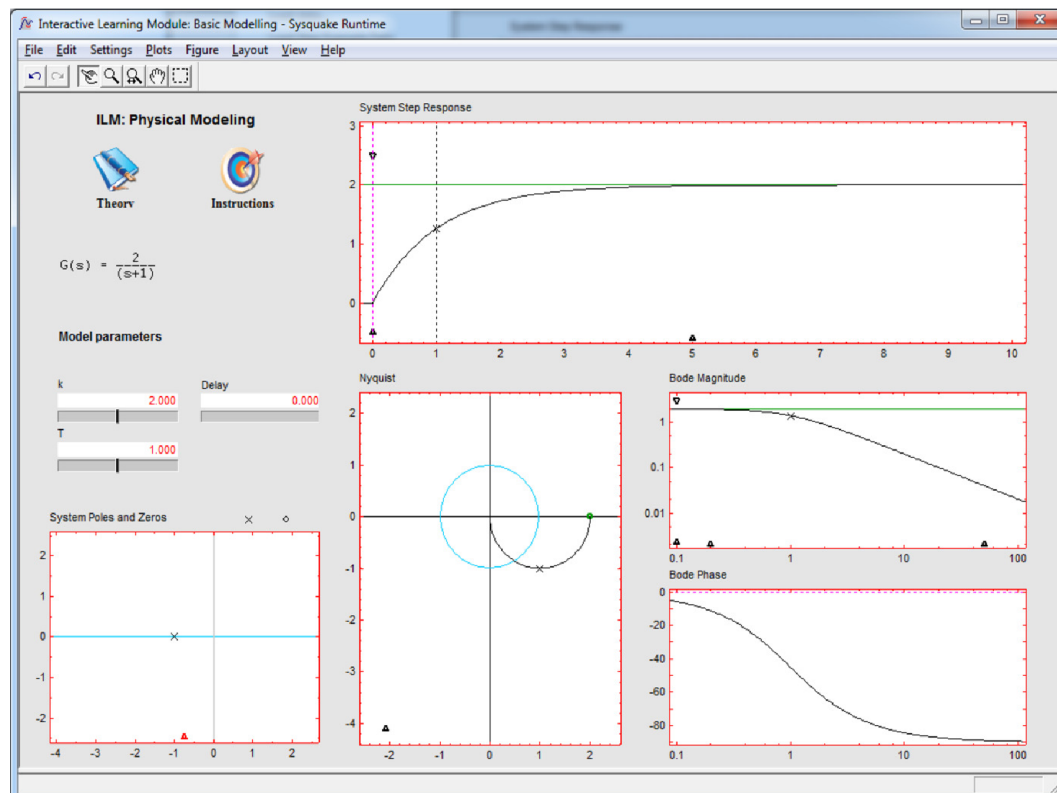
<http://aer.ual.es/ilm/>

finns flera interaktiva program som kan laddas ner gratis. Modulen *Modeling* är lämplig för att studera modellbeskrivningar och dess användargränssnitt visas i figuren nedan.

Modellstrukturen som man vill studera anger man genom att "dra in" poler och nollställen i pol-nollställediagrammet. Parametrar och dödtid kan sedan ändras genom att man drar i punkter eller linjer i de olika diagrammen, eller genom att ange numeriska värden för överföringsfunktionen. Det bästa sättet att lära sig hantera verktyget och undersöka dess möjligheter är att prova sig fram genom att experimentera med de olika menyerna. Mer information finns att hämta på hemsidan.

Skalorna i de olika diagrammen kan man ändra genom att klicka vid de små trianglarna vid skalorna. Det går också att zooma in och ut.

Under fliken *File* finns det användbara kommandot "Reset data". Med hjälp av det återställer man alla värden till utgångsläget.



9.1 Studera överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}$$

Låt utgångsläget vara att $K = T = 1$.

- Variera först förstärkningen K och notera hur pol, stegsvar, Nyquistdiagram och Bodediagram påverkas. Hur kan man bestämma värdet på K ur stegsvaret, Nyquistdiagrammet och Bodediagrammet?
- Sätt $K = 1$ och variera i stället T . Hur påverkas de olika representationerna? Varför påverkas inte formen på Nyquistdiagrammet?
- Sätt $K = T = 1$ och lägg till en dödtid L så att överföringsfunktionen blir

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT} e^{-Ls}$$

Variera L och se hur det påverkar representationerna. Förklara vad som händer med stegsvaret. Varför ser Nyquistdiagrammet ut som det gör? Varför påverkas inte förstärkningskurvan i Bodediagrammet?

9.2 Studera överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

Låt utgångsläget vara att $K = T_1 = T_2 = 1$.

- Variera först förstärkningen K och notera hur poler, stegsvar, Nyquistdiagram och Bodediagram påverkas.
- Sätt $K = 1$ och variera T_1 och T_2 . Notera skillnaden mellan fallen $T_1 \approx T_2$ och $T_1 \gg T_2$. Hur skulle man kunna approximera $G(s)$ i fallet $T_1 \gg T_2$?
- Sätt $K = T_1 = T_2 = 1$ och lägg till ett nollställe så att överföringsfunktionen blir

$$G(s) = \frac{K(1 + sT_3)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

Variera T_3 och se hur det påverkar representationerna. Vad händer när $T_3 < 0$? Vad innebär detta om man vill reglera en process med en sådan överföringsfunktion? Försök förklara fenomenet.

9.3 Studera överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

Låt utgångsläget vara att $\zeta = 0.7$ och $\omega = 1$.

- Variera först frekvensen ω och notera hur poler, stegsvar, Nyquistdiagram och Bodediagram påverkas.
- Sätt $\omega = 1$ och variera ζ . Notera hur representationerna påverkas.

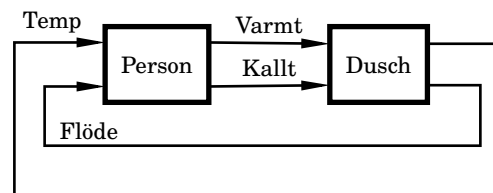
Del II

Lösningar till övningsexemplen

Lösningar till övningsexemplen 1

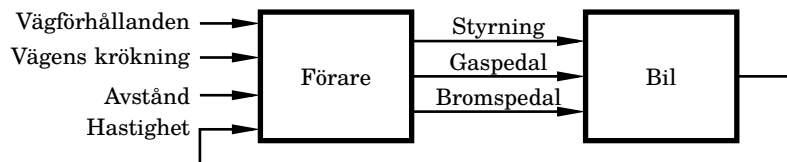
Modellering och linjärisering

- 1.1 a. Ett blockschema för situationen visas i figur S1.1. Personen som duschar känner av temperaturen och flödet (mätsignaler), och justerar duschkranarna (styrksignaler) för att få önskad temperatur och flöde. Det är främst återkoppling som används. Störningar kan vara variationer i vattentryck och temperatur i vattenledningarna som beror av ifall andra vattenkranar i huset är/har varit igång.



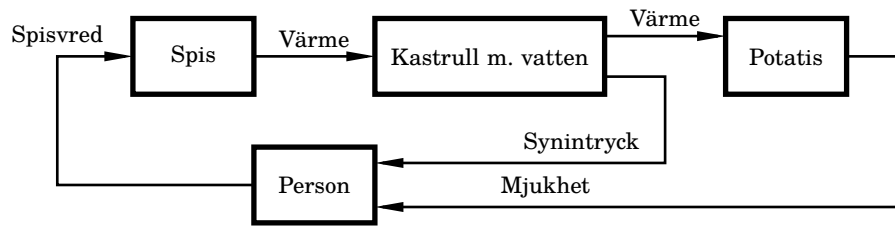
Figur S1.1 Blockschema för person som duschar.

- b. En bilförare använder flera styrksignaler: gaspedalen, bromspedalen, ratten. Föraren vill styra bilen så att den håller sig på vägen med önskad hastighet och säkerhetsmarginaler till andra trafikanter. Mätsignaler är hastighetsmätaren och visuell feedback om hur vägen svänger, avstånd till bilen framför, och andra hinder i vägen. Föraren använder återkoppling genom att titta på hastighetsmätaren, omgivning och andra fordon för att hålla önskad hastighet och följa vägbanan. Blockschema visas i figur S1.2.



Figur S1.2 Blockschema för bilkörning.

- c. Styrsignalen är värmen på spisplattan. Mätsignaler från systemet kan man få genom att titta hur mycket vattnet kokar samt genom att känna hur mjuk potatisen är. Återkoppling används när vi t.ex. sänker effekten på spisplattan när vi ser att vattnet kokar för mycket. Öppen styrning används när vi följer ett givet recept, t.ex. "potatisen är färdig efter 20 min", eller "när vattnet kokar, sätt ner värmen på plattan till halv effekt". Ett blockschema visas i figur S1.3.



Figur S1.3 Blockschema för potatiskokning.

1.2 a.

$$\dot{v} = ku$$

Systemet är linjärt.

b. Vi får nu ytterligare en differentialekvation

$$\dot{p} = v$$

Med tillstånden $x_1 = v$ och $x_2 = p$ får vi

$$\dot{x}_1 = ku$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$y = x_2$$

Man kan också skriva systemet på matrisform

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

c. Termen mx^2 gör systemet olinjärt. Den stationära punkten ges av

$$-0.001(x^0)^2 + u^0 = 0$$

vilket för $u^0 = 0.1$ ger $x^0 = \pm 10$. Den stationära hastigheten blir då $y^0 = 10$ m/s.

d. Systemet ges av

$$\dot{x} = f(x, u) = -mx^2 + ku$$

$$y = g(x, u) = x$$

Vi deriverar f och g med avseende på x och u och får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2mx$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = k$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

Vi sätter in den stationära punkten $(x^0, u^0, y^0) = (10, 0.1, 10)$ i uttrycken för derivatorna och inför variabelbytet $\Delta x = x - x^0$, $\Delta y = y - y^0$, $\Delta u = u - u^0$. Vi får då det linjära systemet

$$\frac{d\Delta x}{dt} = -0.02\Delta x + \Delta u$$

$$\Delta y = \Delta x$$

Med $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ blir systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1.4 Med tillstånd $x_1 = v_{\text{ut}}$ och $x_2 = \dot{v}_{\text{ut}}$ blir systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{pmatrix} v_{\text{in}}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1.5 a. Vi kan t.ex. välja höjden h som tillståndvariabel. Volymändringen i tanken ges av

$$A\dot{h} = q_{\text{in}} - q_{\text{ut}}$$

och från Toricellis lag får vi att $q_{\text{ut}} = a\sqrt{2gh}$. Den sökta differentialekvationen blir

$$\dot{h} + \frac{a}{A}\sqrt{2gh} = \frac{1}{A}q_{\text{in}}$$

b.

$$\dot{h} = -\frac{a}{A}\sqrt{2gh} + \frac{1}{A}q_{\text{in}} \quad (= f(h, q_{\text{in}}))$$

$$y = h \quad (= g(h, q_{\text{in}}))$$

c. Utflödet måste vara samma som inflödet $q_{\text{ut}}^0 = q_{\text{in}}^0$. Nivån beräknas genom att sätta $\dot{h} = 0$ och då fås

$$h^0 = \frac{1}{2g} \left(\frac{q_{\text{in}}^0}{a} \right)^2$$

Vi bestämmer de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial h} = -\frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2h}} \quad \frac{\partial f}{\partial q_{\text{in}}} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{\partial g}{\partial h} = 1 \quad \frac{\partial g}{\partial q_{\text{in}}} = 0$$

Genom att sätta in $h = h^0$ ovan och införa variabler som anger avvikelse från arbetspunkten: $\Delta h = h - h^0$, $\Delta q_{\text{in}} = q_{\text{in}} - q_{\text{in}}^0$, $\Delta y = \Delta h$ så fås det linjäriserade systemet som

$$\Delta \dot{h} = -\frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2h^0}}\Delta h + \frac{1}{A}\Delta q_{\text{in}}$$

$$\Delta y = \Delta h$$

1.6

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1.7 a.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sqrt{x_1} - x_1 x_2 + u^2 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

- b.** I en stationär punkt ska det gälla att $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Från den första ekvationen får vi direkt att $x_2 = 0$. Den andra ekvationen ger sedan $\sqrt{x_1} = u^2$. Det finns alltså oändligt många stationära punkter på formen $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (\alpha^4, 0, \alpha)$.
- c.** $u^0 = 1$ ger den stationära punkten $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (1, 0, 1)$. Vi sätter

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, u) &= x_2 \\ f_2(x_1, x_2, u) &= -\sqrt{x_1} - x_1 x_2 + u^2 \\ g(x_1, x_2, u) &= x_1\end{aligned}$$

och beräknar de partiella derivatorna

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 1 & \frac{\partial f_1}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -\frac{1}{2\sqrt{x_1}} - x_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -x_1 & \frac{\partial f_2}{\partial u} &= 2u \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} &= 1 & \frac{\partial g}{\partial x_2} &= 0 & \frac{\partial g}{\partial u} &= 0\end{aligned}$$

I den stationära punkten gäller alltså

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 1 & \frac{\partial f_1}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -\frac{1}{2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -1 & \frac{\partial f_2}{\partial u} &= 2 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} &= 1 & \frac{\partial g}{\partial x_2} &= 0 & \frac{\partial g}{\partial u} &= 0\end{aligned}$$

Efter ett variabelbyte kan det linjäriserade systemet skrivas som

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

1.8 Vid den sökta arbetspunkten gäller att

$$\begin{aligned}0 &= x_1^2 x_2 + 1 \\ 0 &= x_1 x_2^2 + 1 \\ y &= \arctan \frac{x_2}{x_1} + \frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

så att $x_1^0 = -1$, $x_2^0 = -1$ och $y^0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{8}$. Beräkning av de partiella derivatorna ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 2x_1 x_2 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= x_1^2 & \frac{\partial f_1}{\partial u} &= \sqrt{2} \cos u \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= x_2^2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 2x_1 x_2 & \frac{\partial f_2}{\partial u} &= -\sqrt{2} \sin u \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} &= \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{\partial g}{\partial x_2} &= \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{\partial g}{\partial u} &= 4u\end{aligned}$$

Med variabelbytet

$$\begin{aligned}\Delta u &= u - \frac{\pi}{4} \\ \Delta x_1 &= x_1 + 1 \\ \Delta x_2 &= x_2 + 1 \\ \Delta y &= y - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

blir det linjäriserade systemet

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} + \pi \Delta u\end{aligned}$$

1.9 a. De olinjära tillståndsekvationerna blir

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 & &= f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= \omega^2 x_1 - \frac{\beta}{x_1^2} + u & &= f_2(x_1, x_2, u) \\ y &= x_1 & &= g(x_1, x_2, u)\end{aligned}$$

b. I stationäritet gäller att

$$\ddot{r}(t) = \omega^2 r_0 - \frac{\beta}{r_0^2} + 0 = 0$$

dvs $r_0^3 = \beta/\omega^2$.

Vi beräknar de partiella derivatorna

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 + 2\beta/r_0^3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det linjära systemet blir nu alltså

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta x}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta x\end{aligned}$$

Lösningar till övningsexemplen 2

Dynamiska system

2.1 a. Överföringsfunktionen för ett linjärt system på tillståndsform ges av

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-10)(s+1)+1} \end{aligned}$$

Överföringsfunktionen ger sambandet

$$Y(s) = \frac{1}{(s-10)(s+1)+1} U(s)$$

vilket kan skrivas om som

$$s^2 Y(s) - 9s Y(s) - 9Y(s) = U(s)$$

Vi tar sedan den inversa Laplacetransformen och får differentialekvationen

$$\ddot{y} - 9\dot{y} - 9y = u$$

b. Vi Laplacetransformerar differentialekvationen och får

$$Js^2 Y(s) + Ds Y(s) = U(s)$$

Lös sedan ut $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{1}{Js^2 + Ds} U(s)$$

Överföringsfunktionen är då

$$G(s) = \frac{1}{Js^2 + Ds}$$

När vi skriver systemet på tillståndsform kan vi välja tillstånden som $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$. Vi får då ekvationerna

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = \frac{1}{J}(-D\dot{y} + u) = \frac{1}{J}(-Dx_2 + u) \end{aligned}$$

Systemet på tillståndsform ges av

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{D}{J} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

c. Överföringsfunktionen ges av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = 1(s - -1/k)^{-1}1/k = \frac{1}{1 + sk}$$

d. Överföringsfunktionen ger följande samband mellan $Y(s)$ och $U(s)$

$$(s^3 + \alpha s^2 + \beta s)Y(s) = \gamma U(s)$$

Inverstransformering ger

$$\ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y = \gamma u$$

Om vi inför tillstånden

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

får vi tillståndsbeskrivningen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta & -\alpha \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

Vi kan också använda oss av någon av de standardformer för tillståndsbeskrivningar som finns angivna i formelsamlingen (diagonalform, observerbar kanonisk form, styrbar kanonisk form). För att skriva systemet på diagonalform måste vi faktorisera överföringsfunktionen vilket är svårt när vi inte vet värdena på α och β , så lämpligen väljer vi styrbar eller observerbar kanonisk form. Vi jämför koefficienterna i vår överföringsfunktion med strukturen i formelsamlingen och får att

$$a_1 = \alpha, \quad a_2 = \beta, \quad a_3 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \gamma$$

En tillståndsbeskrivning på observerbar kanonisk form blir då

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

Modellen presenteras och analyseras i artikeln *Complex dynamics in low-dimensional continuous-time business cycle models: the Sil'nikov case*, H.W. Lorenz, *System Dynamics Review*, vol.8 no.3, 1992.

2.2 a. Överföringsfunktionen är

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D =$$

$$= (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 =$$

$$= \frac{2s^2 + 7s + 1}{s^2 + 5s + 6}.$$

Från överföringsfunktionen är det enkelt att bestämma differentialekvationen

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = (2s^2 + 7s + 1)U(s)$$

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 2\ddot{u} + 7\dot{u} + u$$

b. Överföringsfunktionen är

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+7 & -2 \\ 15 & s-4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{2s+3}{s^2+3s+2}. \end{aligned}$$

Differentialekvationen blir

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) \\ (s^2+3s+2)Y(s) &= (2s+3)U(s) \\ \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y &= 2\dot{u} + 3u \end{aligned}$$

c. $G(s) = \frac{5s+8}{s+1}, \quad \dot{y} + y = 5\dot{u} + 8u$

d. $G(s) = \frac{3s^2+7s+18}{s^2+2s+5}, \quad \ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 3\ddot{u} + 7\dot{u} + 18u$

2.3 a. Partialbråksuppdelning av överföringsfunktionen ger

$$G(s) = 2 + \frac{2}{s+3} - \frac{5}{s+2}$$

och genom att inverslaplacetransformera detta fås impulssvaret

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}G(s) = 2\delta(t) + 2e^{-3t} - 5e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

Eftersom systemmatrisen var given på diagonalform hade vi i detta fall även enkelt kunnat beräkna impulssvaret som

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\delta(t), \quad t \geq 0.$$

Stegsvaret beräknas t.ex. genom att integrera impulssvaret

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(\tau) d\tau = \int_0^t (2\delta(\tau) + 2e^{-3\tau} - 5e^{-2\tau}) d\tau = \\ &= 2 + \left[\frac{5}{2}e^{-2\tau} - \frac{2}{3}e^{-3\tau} \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

b. Överföringsfunktionen har partialbråksuppdelningen

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

och impulssvaret blir

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}G(s) = e^{-t} + e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

Stegsvaret ges då av

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = \frac{3}{2} - e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

c. $h(t) = 5\delta(t) + 3e^{-t}, \quad y(t) = 8 - 3e^{-t}, \quad t \geq 0$

d. $h(t) = 3\delta(t) + e^{-t} \sin 2t + e^{-t} \cos 2t = 3\delta(t) + \sqrt{2}e^{-t} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$
 $y(t) = 3 + \frac{1}{5}e^{-t}(3 + \sin 2t - 3 \cos 2t), \quad t \geq 0$

2.4 Efter Laplacetransformation fås

$$sX = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

Lös ut X :

$$(sI - A)X = BU$$

$$X = (sI - A)^{-1}BU$$

Detta ger

$$Y = C(sI - A)^{-1}BU + DU = \left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)U$$

2.5 a. Polerna ges av $s^2 + 4s + 3 = 0$, vilket ger $s = -1$ och $s = -3$. Systemet saknar nollställen. Eftersom båda polerna har negativ realdel är systemet stabilt.

b. Den statiska förstärkningen är $G(0) = \frac{1}{3}$.

c. Vid ett stegsvar är insignalen $u(t)$ ett steg, vilket har Laplacetransformen $U(s) = \frac{1}{s}$. Utsignalen blir

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \frac{1}{s}$$

Slutvärdet kan beräknas med slutvärdesteoremet

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \frac{1}{s} = \frac{1}{3}$$

Slutvärdesteoremet kan endast användas om vi vet att slutvärdet existerar (d.v.s. att $y(t)$ inte går mot oändligheten). Eftersom vi visat att systemet är stabilt vet vi att slutvärdet existerar. Begynnelsevärdet kan beräknas med begynnelsevärdesteoremet

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \frac{1}{s} = 0$$

d. Vid ett impulssvar är Laplacetransformen för insignalen $U(s) = 1$. Utsignalen blir

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

Vi använder slut- och begynnelsevärdesteoremen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2 + 4s + 3} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s^2 + 4s + 3} = 0$$

e. Systemets stegsvar ges av

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \frac{1}{s}$$

enligt tidigare uppgift. Derivatan av en signal får vi i Laplacedomänen genom att multiplicera med s . Vi kan kalla derivatan av stegsvaret för $z(t)$ och får då

$$Z(s) = sY(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

Vi ser att derivatan av stegsvaret är detsamma som impulssvaret och från föregående deluppgift gäller då

$$\lim_{t \rightarrow 0} z(t) = 0$$

- 2.6 a.** Polerna ges av $s^2 + 0.6s + 0.25 = 0$, vilket ger $s = -0.3 \pm 0.4i$. Systemet saknar nollställen.
- b.** Den statiska förstärkningen är $G(0) = 1$.
- c.** Insignalen (ett steg) har Laplacetransformen $U(s) = \frac{1}{s}$. Utsignalen blir

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{0.25}{s(s^2 + 0.6s + 0.25)}$$

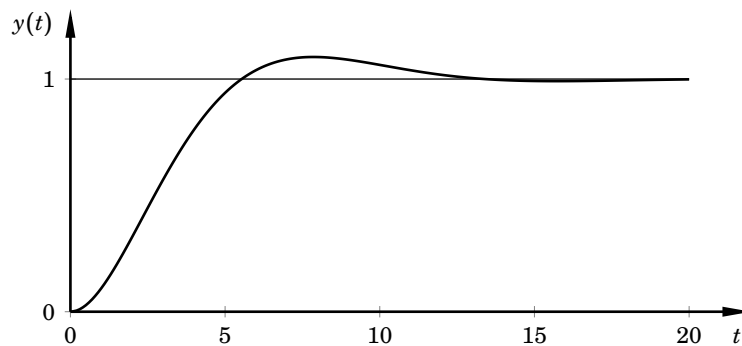
Eftersom detta uttryck har komplexa poler skriver vi det först som

$$Y(s) = \frac{\omega^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)}$$

där $\omega = 0.5$ och $\zeta = 0.6$. Vi använder sedan invers Laplacetransform (transform nr 28) och får

$$y(t) = 1 - 1.25e^{-0.3t} \sin(0.4t + 0.9273)$$

Stegsvaret visas nedan.



- 2.7** Laplacetransformation av differentialekvationen $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f$ ger

$$(ms^2 + cs + k)Y = F$$

och överföringsfunktionen är

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}.$$

Polerna är $s = -c/2m \pm i\sqrt{k/m - c^2/4m^2}$. En ändring av k medför att polerna flyttas i imaginär led. En ändring av c påverkar både real- och imaginärdelarna.

Polerna kan inte hamna i höger halvplan eftersom $c \geq 0$ och $m > 0$ av fysikaliska skäl.

2.8 a. $G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$

b. $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}, \quad T = \frac{A}{a} \sqrt{\frac{2h^0}{g}}$

- 2.9 a.** För att vara asymptotiskt stabilt måste alla egenvärden till systemmatrisen A ligga strikt i VHP. Dvs $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ för $\forall i$.

Egenvärdena till A ges av den karakteristiska ekvationen

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

som i detta fall har två lösningar, $\lambda_1 = -i$ och $\lambda_2 = i$. Eftersom egenvärdena ej ligger strikt i VHP är systemet ej asymptotiskt stabilt.

- b. Om alla egenvärden till A ligger strikt i VHP har vi säkert stabilitet. Om något egenvärde ligger strikt i HHP har vi garanterad instabilitet. Om däremot något egenvärde ligger på imaginära axeln kan systemet vara stabilt eller instabilt.

I detta exemplet finns det inga egenvärden i HHP. Dessutom är samtliga egenvärden på imaginära axeln unika. Det betyder att systemet är stabilt.

- 2.10** Den karakteristiska ekvationen är

$$s^3 + 2s^2 + 3s + 7 = 0$$

Överföringsfunktionen är stabil om samtliga koefficienter är positiva, vilket de är, samt om koefficienten framför s^2 multiplicerad med koefficienten framför s^1 är större än koefficienten framför s^0 . Eftersom $2 \cdot 3 < 7$ är överföringsfunktionen inte stabil.

- 2.11** Första och andra ordningens system är stabila om och endast om koefficienterna i överföringsfunktionens nämnarpolynom är positiva. Alla överföringsfunktioner utom G_3 är stabila. Alla stegsvar utom E svarar mot stabila system. Därför är $G_3 = E$.

Alla överföringsfunktioner utom G_3 , G_4 och G_7 har statiska förstärkningen $G_i(0) = 1$, vilket innebär att stegsvarens slutvärde är ett. G_7 har statiska förstärkningen $G_7(0) = 2/3$ vilket innebär att $G_7 = C$.

Stegsvaret D har en derivata som är skild från 0 vid $t = 0$. Undersökning av begynnelsederivatan för överföringsfunktionerna ger att så endast är fallet för G_1 och G_5 . G_1 har en tidskonstant på 10s, medan G_5 har en tidskonstant på 1s. Därför är $G_5 = D$.

Nu återstår två stegsvar, A och B , vilka svarar mot andra ordningens system med komplexa poler och statisk förstärkning ett. De överföringsfunktioner som uppfyller dessa krav är G_2 och G_6 . Den relativa dämpning ζ är mindre i G_6 än i G_2 , vilket innebär att $G_2 = A$ och $G_6 = B$.

- 2.12** PZ1. Systemet har poler $-1/4 \pm i$ och ett nollställe -1 . Överföringsfunktionen är alltså

$$G(s) = K \frac{s+1}{(s+\frac{1}{4})^2+1} \approx K \frac{s+1}{s^2+\frac{1}{2}s+1}.$$

Begynnelsevärde, begynnelsederivata och slutvärde blir:

$$\begin{aligned} y(0) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s) = 0 \\ \dot{y}(0) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s) = K \neq 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= G(0) = K \neq 0 \end{aligned}$$

Stegsvaret är svängande med perioden $T = 2\pi/1 \approx 6$. Detta måste vara stegsvar D.

- PZ2. Systemet har poler -1 och -2 och ett nollställe 1 . Överföringsfunktionen är

$$G(s) = K \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

Begynnelsevärde, begynnelsederivata och slutvärde blir:

$$\begin{aligned} y(0) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s) = 0 \\ \dot{y}(0) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s) = K \neq 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= G(0) = -\frac{K}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

Vi ser att begynnelsederivatan och slutvärdet har olika tecken. Detta stämmer in på stegsvar F.

- PZ3. Systemet har poler $-1/4 \pm i$ och ett nollställe i origo. Överföringsfunktionen är

$$G(s) = K \frac{s}{(s+\frac{1}{4})^2+1} \approx K \frac{s}{s^2+\frac{1}{2}s+1}.$$

Begynnelsevärde, begynnelsederivata och slutvärde blir:

$$\begin{aligned} y(0) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s) = 0 \\ \dot{y}(0) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s) = K \neq 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= G(0) = 0 \end{aligned}$$

Stegsvaret är svängande med perioden $T = 2\pi/1 \approx 6$. Detta är stegsvar G.

- PZ4. Systemet har poler -1 och -2 och ett nollställe -3 . Överföringsfunktionen är

$$G(s) = K \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}.$$

Begynnelsevärde, begynnelsederivata och slutvärde blir:

$$\begin{aligned} y(0) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s) = 0 \\ \dot{y}(0) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s) = K \neq 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= G(0) = \frac{3K}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

Begynnelsederivatan och slutvärdet har samma tecken. Det enda ickesvängande stegsvaret som stämmer in på detta är C.

2.13

- a. För impulssvar gäller att $u(t) = \delta(t)$ (Diracspik). Då har vi

$$U(s) = 1$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

Begynnelsevärde:

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)$$

Slutvärde:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

Alla överföringsfunktionerna har stabila poler, därmed kan vi använda slut- och begynnelsevärdesteoremen.

	$y(0)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$
$G_1(s)$	1	0
$G_2(s)$	3	0
$G_3(s)$	0	0
$G_4(s)$	0	0
$G_5(s)$	0	1
$G_6(s)$	0	1

Båda impulssvaren i figuren har begynnelsevärde 0 och slutvärde 0. De måste därmed motsvara $G_3(s)$ och $G_4(s)$. Polerna för $G_3(s)$ ligger i $s = -1$, polerna för $G_4(s)$ ligger i $s = -3$.

$G_4(s)$ är därför ett snabbare system, vilket motsvarar impulssvaret för sockerdricka. $G_3(s)$ är långsammare, och motsvarar impulssvaret för fullkornspasta.

- b. Normalt äter man en viss mängd mat på en relativt kort tid och låter sedan bli att äta under en längre period. Man kan därmed modellera matintaget som en impuls, något som sker momentant jämfört med tiden det tar för kroppen att ta upp näringen i maten.

Ett stegsvar i matintag hade motsvarat att man åt kontinuerligt under en längre tid, näringstillförsel med dropp kan beskrivas med ett stegsvar.

2.14 a.

$$Y = G_1(U + G_2Y)$$

$$Y(1 - G_1G_2) = G_1U$$

$$Y = \frac{G_1}{1 - G_1G_2}U$$

- b.

$$Y = G_2(H_1U + G_1U + H_2Y)$$

$$Y(1 - G_2H_2) = (G_2H_1 + G_2G_1)U$$

$$Y = \frac{G_2H_1 + G_2G_1}{1 - G_2H_2}U$$

- c. Inför hjälpvariabeln Z som utsignalen från G_1 .

$$\begin{aligned} Z &= G_1(U + G_3(Z + G_2Z)) \\ Z(1 - G_1G_3 - G_1G_3G_2) &= G_1U \\ Z &= \frac{G_1}{1 - G_1G_3 - G_1G_3G_2}U \\ Y &= \frac{G_2G_1}{1 - G_1G_3 - G_1G_3G_2}U \end{aligned}$$

- d.

$$\begin{aligned} Y &= G_2(-H_2Y + G_1(U - H_1Y)) \\ Y(1 + G_2H_2 + G_2G_1H_1) &= G_2G_1U \\ Y &= \frac{G_2G_1}{1 + G_2H_2 + G_2G_1H_1}U \end{aligned}$$

- 2.15 a. Från blockschemat får vi ekvationerna

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_P(s)(U(s) + D(s)) \\ U(s) &= G_R(s)E(s) \\ E(s) &= R(s) - Y(s) \end{aligned}$$

Lös ut $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}R(s) + \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}D(s)$$

Systemet har två insignaler, $R(s)$ och $D(s)$. Överföringsfunktionen från $R(s)$ till $Y(s)$ är

$$G_{yr}(s) = \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}$$

- b. Överföringsfunktionen från $D(s)$ till $Y(s)$ är

$$G_{yd}(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}$$

- c. Lös nu istället ut $E(s)$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_P(s)G_R(s)}R(s) - \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}D(s)$$

Överföringsfunktionen från $R(s)$ till $E(s)$ blir då

$$G_{er}(s) = \frac{1}{1 + G_P(s)G_R(s)}$$

- d. Lös nu ut $U(s)$

$$U(s) = \frac{G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}R(s) - \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}D(s)$$

Överföringsfunktionen från $D(s)$ till $U(s)$ blir

$$G_{ud}(s) = -\frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}$$

2.16 a. Partialbråksuppdelning:

$$G(s) = \frac{s^2 + 6s + 7}{s^2 + 5s + 6} = \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6} + 1 = \frac{-1}{s + 2} + \frac{2}{s + 3} + 1$$

Här är en viss frihet att välja koefficienterna i B - och C -matriserna, men produkten $b_i c_i$ är konstant. Sätt t.ex. $b_1 = b_2 = 1$. Vi kan då direkt skriva upp systemet på diagonalform:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} u \end{aligned}$$

b. Skriv först om systemet som

$$G(s) = \frac{b_0 s + b_1}{s^2 + a_1 s + a_2} + d = \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6} + 1$$

Den styrbara kanoniska formen kan direkt avläsas ur överföringsfunktionen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} u \end{aligned}$$

c. Den observerbara kanoniska formen erhålles på samma sätt:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} u \end{aligned}$$

Lösningar till övningsexemplen 3

Frekvensanalys

3.1 a. Utsignalen ges av

$$y(t) = |G(3i)| \sin(3t + \arg G(3i)) =$$

där

$$|G(i\omega)| = \frac{0.01\sqrt{1+100\omega^2}}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.01\omega^2}}$$

och

$$\arg G(i\omega) = \arctan 10\omega - \arctan \omega - \arctan 0.1\omega$$

För $\omega = 3$ fås $|G(i\omega)| = 0.0909$ och $\arg G(i\omega) = -0.003$ vilket ger

$$y(t) = 0.0909 \sin(3t - 0.003)$$

b. Avläsning i diagrammet ger $|G(3i)| \approx 0.09$ och $\arg G(3i) \approx 0$. Vi får

$$y(t) = 0.09 \sin 3t$$

3.2

a. Lufttemperaturen kommer att påverka vattentemperaturen mycket snabbare i den lilla trädgårdspoolen än i havet. Snabbare påverkan innebär att förstärkningen är högre för höga frekvenser. Därför motsvarar den heldragna linjen systemet trädgårdspoolen - $G_2(s)$, och den streckade linjen havsvattnet - $G_1(s)$.

b. Tidsenheten i Bodediagrammet är timmar. Vi räknar därför om periodtiden till timmar

$$1 \text{ år} = 365 \cdot 24 \text{ h} = 8760 \text{ h}$$

Vinkelfrekvensen för svängningen blir då

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8760} \text{ rad/h} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ rad/h}.$$

Vi läser av den streckade amplitudkurvan vid denna frekvens och får

$$|G(i\omega)| \approx 0.5$$

Det innebär att svängningen i utsignalen (vattentemperaturen) har halva amplituden hos svängningen i insignalen (lufttemperaturen) vid denna frekvens. Skillnaden mellan max- och mintemperatur i luften är $\Delta T_{luft} = 19^\circ\text{C} - (-5^\circ\text{C}) = 24^\circ\text{C}$. Skillnaden mellan max- och mintemperatur i vattnet blir då $\Delta T_{vatten} = 0.5 \cdot 24^\circ\text{C} = 12^\circ\text{C}$.

c. Vinkelfrekvensen för svängningen blir nu

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24} \text{ rad/h} = 0.26 \text{ rad/h}.$$

Vi läser av den heldragna faskurvan vid denna frekvens och får

$$\arg(G(i\omega)) \approx -30^\circ.$$

Det betyder att toppen för utsignalen kommer $\frac{30^\circ}{360^\circ} \approx 0.08$ period = $0.08 \cdot 24 \text{ h} = 1.92 \text{ h}$ senare än toppen för insignalen. Poolen är alltså som varmast ungefär kl. 15.00.

3.3 a. Utsignalen ges av

$$y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega))$$

där

$$|G(i\omega)| = \left| \frac{10}{(i\omega)^2 + 0.5i\omega + 1} \right| = \frac{10}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (0.5\omega)^2}}$$

och

$$\begin{aligned} \arg G(i\omega) &= \arg \frac{10}{(i\omega)^2 + 0.5i\omega + 1} = -\arg((1-\omega^2) + 0.5\omega i) \\ &= \begin{cases} -\arctan \frac{0.5\omega}{1-\omega^2}, & \omega < 1 \\ -\pi/2, & \omega = 1 \\ -\arctan \frac{0.5\omega}{1-\omega^2} - \pi, & \omega > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Utsignalerna blir

$$10.4 \sin(0.2t - 5.9^\circ), \quad 20.0 \sin(t - 90.0^\circ), \quad 0.011 \sin(30t - 179.0^\circ)$$

- b.** För $\omega = 0.2$ avläser man $|G(i\omega)| \approx 10$ och $\arg G(i\omega) \approx -5^\circ$. För $\omega = 1$ avläser man $|G(i\omega)| \approx 20$ och $\arg G(i\omega) \approx -90^\circ$. För $\omega = 30$ avläser man $|G(i\omega)| \approx 0.01$ och $\arg G(i\omega) \approx -180^\circ$. Utsignalerna blir ungefär

$$10 \sin(0.2t - 5^\circ), \quad 20 \sin(t - 90^\circ), \quad 0.01 \sin(30t - 180^\circ)$$

3.4 Vi använder följande generella arbetsgång för att rita Bodediagram:

- Dela upp systemets överföringsfunktion i delfaktorer.
- Bestäm lågfrekvensasymptoten (små s)
- Bestäm brytfrekvenserna (d.v.s. beloppet av systemets poler och nollställen).
- Rita förstärkningskurvans asymptoter från låga till höga frekvenser med hjälp av följande tumregler:
 - En pol minskar förstärkningskurvans lutning med 1 vid brytfrekvensen.
 - Ett nollställe ökar förstärkningskurvans lutning med 1 vid brytfrekvensen.
- Rita faskurvan från låga till höga frekvenser med hjälp av följande tumregler:
 - En (stabil) pol minskar faskurvan med 90° . Vid brytfrekvensen har fasen minskat 45° .
 - Ett (stabilt) nollställe ökar faskurvan med 90° . Vid brytfrekvensen har fasen ökat 45° .
- Rita de riktiga förstärknings- och faskurvorna med hjälp av asymptoterna och typkurvorna i formelsamlingen.

a. Överföringsfunktionen kan skrivas som

$$G(s) = 3 \cdot \frac{1}{1 + s/10}$$

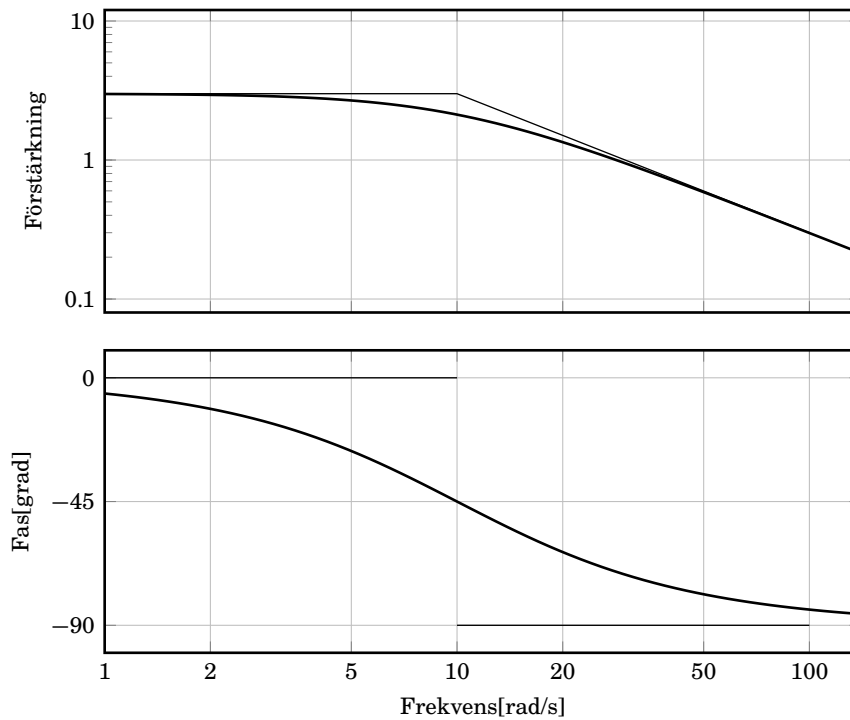
Lågfrekvensasymptot: $G(s) \approx 3$

Brytfrekvens: $\omega = 10$ rad/s (pol)

Förstärkningskurvan börjar med lutningen 0 och värdet 3. Vid $\omega = 10$ rad/s minskar lutningen med 1 p.g.a. polen och slutar med lutningen -1 .

Faskurvan börjar på 0° . Vid $\omega = 10$ rad/s minskar fasen med 90° p.g.a. polen och slutar på -90° .

Asymptoterna och det färdiga diagrammet visas i figur [S3.1](#).



Figur S3.1 Bodediagrammet för $G(s) = \frac{3}{1 + s/10}$

- b. Överföringsfunktionen kan skrivas som

$$G(s) = 10 \cdot \frac{1}{1 + 10s} \cdot \frac{1}{1 + s}$$

Lågfrekvensasymptot: $G(s) \approx 10$

Brytfrekvenser: $\omega = 0.1$ rad/s (pol), $\omega = 1$ rad/s (pol)

Förstärkningskurvan börjar med lutningen 0 och värdet 10. Vid $\omega = 0.1$ rad/s minskar lutningen med 1 p.g.a. polen till -1 , och vid $\omega = 1$ rad/s minskar lutningen med ytterligare 1 p.g.a. polen och slutar med lutningen -2 .

Faskurvan börjar på 0° . Vid $\omega = 0.1$ rad/s minskar fasen med 90° p.g.a. polen och vid $\omega = 1$ rad/s minskar fasen med ytterligare 90° p.g.a. polen och slutar på -180° .

Asymptoterna och det färdiga diagrammet visas i figur S3.2.

- c. Överföringsfunktionen kan skrivas som

$$G(s) = e^{-s} \cdot \frac{1}{1 + s}$$

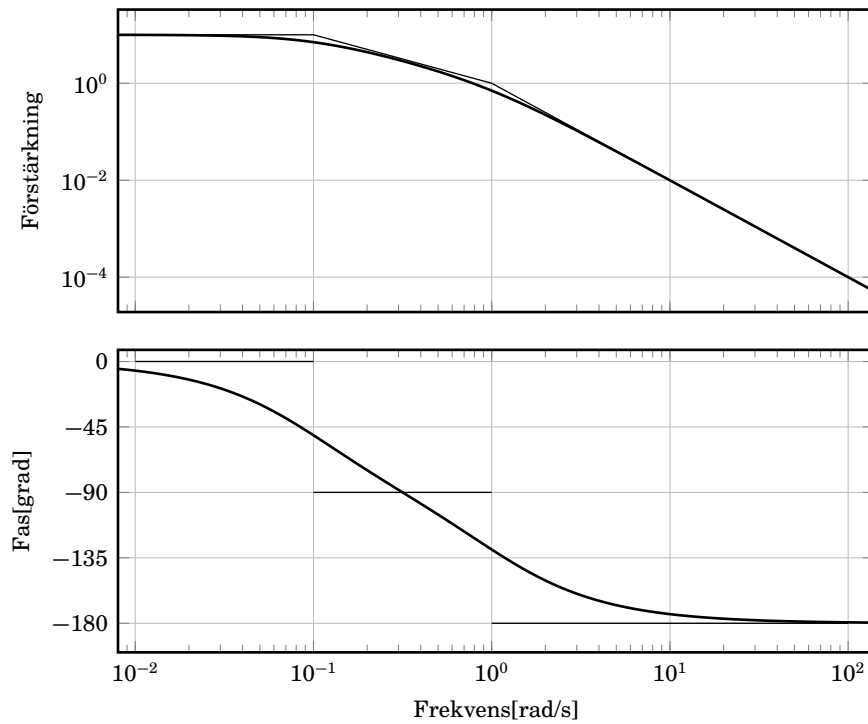
Lågfrekvensasymptot: $G(s) \approx 1$

Brytfrekvenser: $\omega = 1$ rad/s (pol)

Tidsfördröjningen (e^{-s}) påverkar inte förstärkningskurvan, som börjar med lutningen 0 och värdet 1. Vid $\omega = 1$ rad/s minskar lutningen med 1 p.g.a. polen och slutar med lutningen -1 .

Faskurvan är svårare att skissa. En lösning är att rita asymptoterna för systemet utan tidsfördröjning och sedan addera faskurvan för e^{-s} från formelsamlingen eller genom att beräkna några punkter. Vi ser i alla fall att faskurvan börjar på 0° och att fasen sedan minskar både p.g.a. polen (vid $\omega = 1$ rad/s) och tidsfördröjningen. Tidsfördröjningen gör att faskurvan går mot $-\infty$ för stora ω .

Det färdiga diagrammet visas i figur S3.3.



Figur S3.2 Bodediagrammet för $G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)(1 + s)}$

d. Överföringsfunktionen kan skrivas som

$$G(s) = \frac{1}{s} \cdot (1 + s) \cdot \frac{1}{1 + s/10}$$

Lågfrekvensasymptot: $G(s) \approx \frac{1}{s}$

Brytfrekvenser: $\omega = 1$ rad/s (nollställe), $\omega = 10$ rad/s (pol)

Förstärkningskurvan börjar med lutningen -1 . Vid $\omega = 1$ rad/s ökar lutningen med 1 p.g.a. nollstället till 0, och vid $\omega = 10$ rad/s minskar lutningen med 1 p.g.a. polen och slutar med lutningen -1 .

Faskurvan börjar på -90° . Vid $\omega = 1$ rad/s ökar fasan med 90° p.g.a. nollstället och vid $\omega = 10$ rad/s minskar fasan med 90° p.g.a. polen och slutar på -90° .

Det färdiga diagrammet visas i figur S3.4.

e. Överföringsfunktionen kan skrivas som

$$G(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} \cdot (1 + 5s) \cdot \frac{1}{1 + 2\zeta(s/2) + (s/2)^2}$$

där $\zeta = 0.2$.

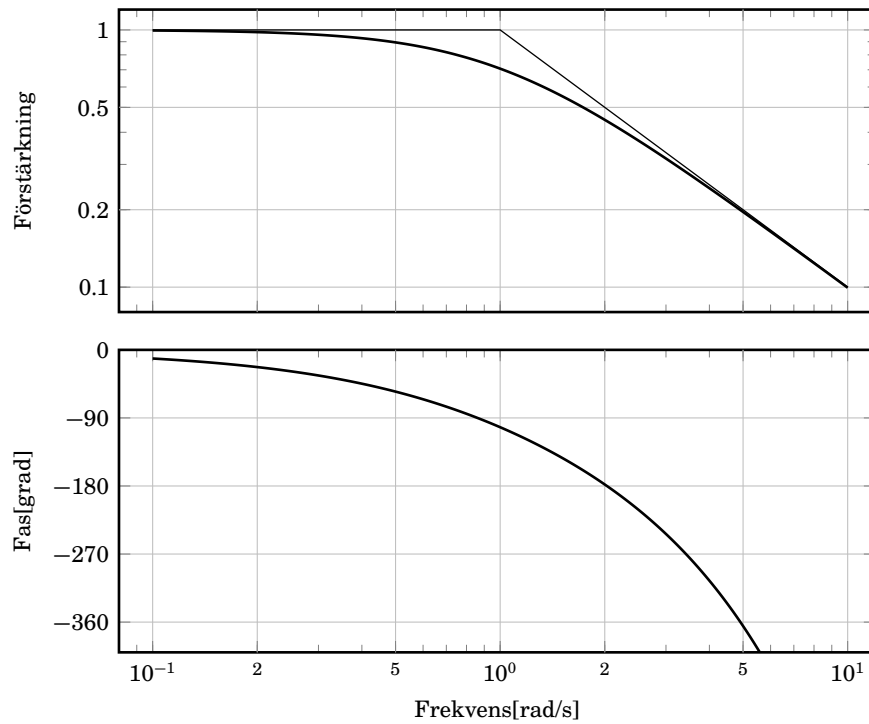
Lågfrekvensasymptot: $G(s) \approx \frac{2}{s}$

Brytfrekvenser: $\omega = 0.2$ rad/s (nollställe), $\omega = 2$ rad/s (komplexkonjugerat polpar)

Förstärkningskurvan börjar med lutningen -1 . Vid $\omega = 0.2$ rad/s ökar lutningen med 1 p.g.a. nollstället till 0, och vid $\omega = 2$ rad/s minskar lutningen med 2 p.g.a. polparet och slutar med lutningen -2 .

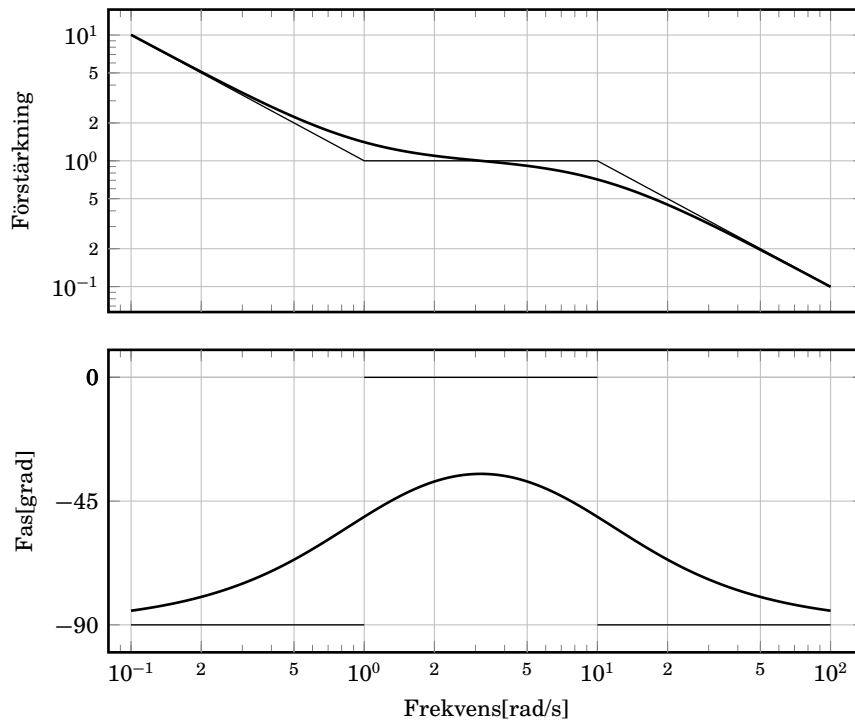
Faskurvan börjar på -90° . Vid $\omega = 0.2$ rad/s ökar fasan med 90° p.g.a. nollstället och vid $\omega = 2$ rad/s minskar fasan med 180° p.g.a. polparet och slutar på -180° .

Det komplexkonjugerade polparets låga dämpning ($\zeta = 0.2$) gör att förstärkningskurvan får en resonanstopp vid $\omega = 2$ rad/s samt att faskurvan minskar snabbt vid denna frekvens, se typkurvorna i formelsamlingen. Det färdiga diagrammet visas i figur S3.5.



Figur S3.3 Bodediagrammet för $G(s) = \frac{e^{-s}}{1+s}$

- 3.5 a.** Nyquistkurvan börjar i punkten 3 (den statiska förstärkningen) för $\omega = 0$. Både förstärkningen och fasen avtar monotont, vilket gör att kurvan kommer att vridas medurs samtidigt som avståndet till origo minskar. För stora ω går beloppet mot 0 och fasen mot -90° . Kurvan kommer därför enbart befinna sig i den fjärde kvadranten och närma sig origo längs den negativa imaginära axeln då $\omega \rightarrow \infty$. Genom att välja ut ytterligare ett par frekvenser (t.ex. $\omega = 1, 10, 100$ rad/s) och rita in dessa punkter kan man sedan skissa Nyquistkurvan. Den färdiga kurvan visas i figur S3.6.
- b.** Nyquistkurvan börjar i punkten 10 (den statiska förstärkningen) för $\omega = 0$. Både förstärkningen och fasen avtar monotont, vilket gör att kurvan kommer att vridas medurs samtidigt som avståndet till origo minskar. För stora ω går beloppet mot 0 och fasen mot -180° . Kurvan kommer därför att befinna sig i först den fjärde och sedan den tredje kvadranten och närma sig origo längs den negativa reella axeln då $\omega \rightarrow \infty$. Skärningen med negativa imaginära axeln kan ritas in genom att läsa av beloppet då fasen är -90° . Genom att välja ut ytterligare ett par frekvenser (t.ex. $\omega = 0.1, 1$ rad/s) och rita in dessa punkter kan man sedan skissa Nyquistkurvan. Den färdiga kurvan visas i figur S3.7.
- c.** Nyquistkurvan börjar i punkten 1 (den statiska förstärkningen) för $\omega = 0$. Både förstärkningen och fasen avtar monotont, vilket gör att kurvan kommer att vridas medurs samtidigt som avståndet till origo minskar. För stora ω går beloppet mot 0 och fasen mot $-\infty$. Kurvan kommer därför rotera ett oändligt antal gånger samtidigt som den närmar sig origo. De första skärningarna med axlarna kan ritas in genom att avläsa beloppet då fasen är $-90^\circ, -180^\circ, -270^\circ$ och -360° . Den färdiga kurvan visas i figur S3.8.
- 3.6** Låt den sökta överföringsfunktionen vara $G(s)$. Förstärkningskurvan börjar med lutningen -1 vilket betyder att det finns en faktor $\frac{1}{s}$ (en integrator) i systemet. Vi ser att det finns två brytfrekvenser, $\omega_1 = 1$ rad/s samt $\omega_2 = 100$ rad/s. Förstärkningskurvan bryter uppåt en gång vid ω_1 samt nedåt en gång vid ω_2 . Således innehåller täljaren faktorn $1 + s$ och nämnaren faktorn $1 + s/100$. Dessutom in-



Figur S3.4 Bodediagrammet för $G(s) = \frac{1+s}{s(1+s/10)}$

nehåller $G(s)$ en konstant förstärkningsfaktor K . Vi har alltså

$$G(s) = \frac{K(1+s)}{s(1+s/100)}$$

För att bestämma K utvärderar vi amplitudkurvens lågfrekvensasymptot vid t.ex. $\omega = 0.01$ vilket ger

$$|G(0.01i)| = \frac{K}{0.01} = 1 \Rightarrow K = 0.01$$

En kontroll visar att faskurvan stämmer överens med detta system.

- 3.7** Låt den sökta överföringsfunktionen vara $G(s)$. Beloppsskurvan har två brytfrekvenser, $\omega_1 = 2$ rad/s samt $\omega_2 = 100$ rad/s. Beloppsskurvan bryter nedåt en respektive tre gånger vid dessa. Således innehåller nämnaren i $G(s)$ faktorerna $(1 + \frac{s}{2})$ och $(1 + \frac{s}{100})^3$. Lågfrekvensasymptoten har lutningen $+1$. Därmed innehåller $G(s)$ en faktor s i täljaren. Dessutom innehåller $G(s)$ en konstant förstärkningsfaktor K . Vi har alltså

$$G(s) = \frac{Ks}{(1 + \frac{s}{2})(1 + \frac{s}{100})^3}$$

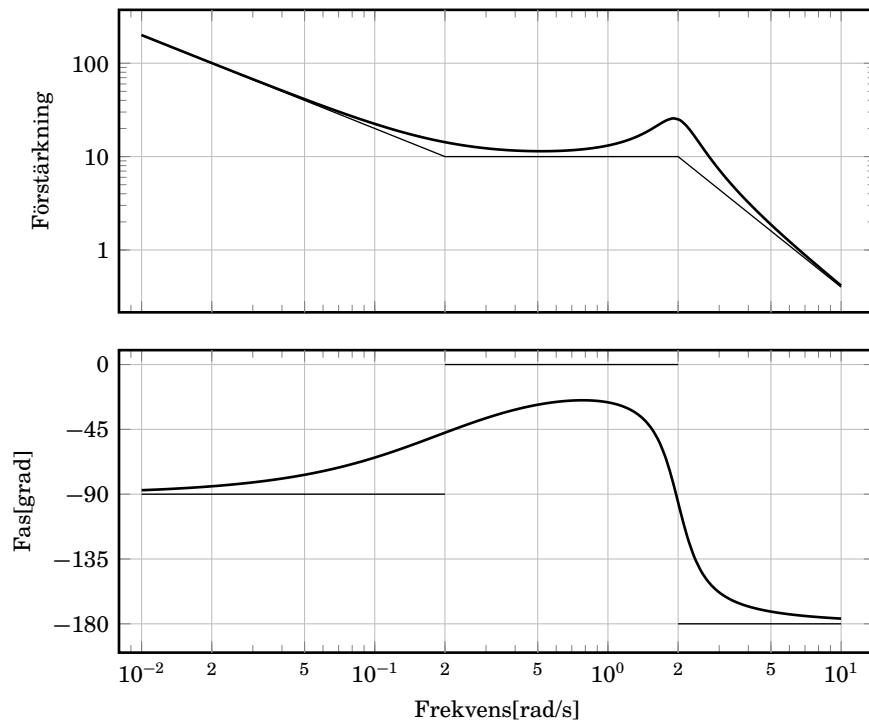
Faktorn K beräknas genom att man bestämmer en punkt på lågfrekvensasymptoten $G_{LF}(s) = Ks$, till exempel

$$|G_{LF}(i\omega)| = K\omega = 1$$

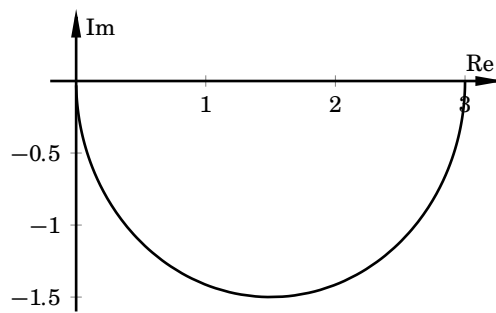
för $\omega = 0.5$ rad/s. Detta ger

$$K = 2$$

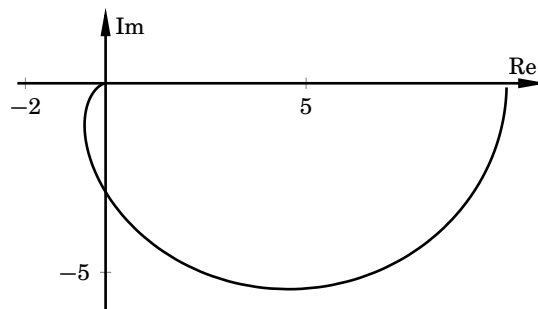
En kontroll visar att faskurvan stämmer överens med detta system.



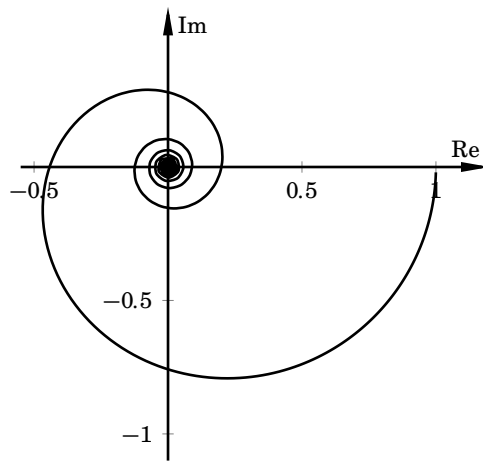
Figur S3.5 Bodediagrammet för $G(s) = \frac{2(1+5s)}{s(1+0.2s+0.25s^2)}$



Figur S3.6 Nyquistdiagrammet för $G(s) = \frac{3}{1+s/10}$



Figur S3.7 Nyquistdiagrammet för $G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+s)}$



Figur S3.8 Nyquistdiagrammet för $G(s) = \frac{e^{-s}}{1+s}$

Lösningar till övningsexemplen 4

Återkopplade system

4.1

- a. Laplacetransformering av differentialekvationen ger

$$sY(s) + 0.01Y(s) = 0.01U(s)$$

Överföringsfunktionen $G_P(s)$ ges av

$$Y(s) = G_P(s)U(s) = \frac{0.01}{s + 0.01}U(s)$$

- b. Slutna systemets överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} = \frac{\frac{0.01}{s + 0.01}K}{1 + \frac{0.01}{s + 0.01}K} = \frac{0.01K}{s + 0.01 + 0.01K}$$

- c. Det önskade och det faktiska karakteristiska polynomet är lika om alla koefficienter i polynomen är lika. Identifiering av koefficienter ger

$$0.1 = 0.01 + 0.01K \quad \Leftrightarrow \quad K = 9$$

- 4.2 Eftersom $r(t) = 0$ blir reglerfelet $e(t) = -y(t)$.

$$Y(s) = G_P(s)(F(s) - G_R(s)Y(s)) \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)}F(s)$$

Om $f(t)$ är ett enhetssteg blir $F(s) = \frac{1}{s}$.

- a. Sök $e(\infty)$ då $G_R = K$.

$$e(\infty) = -\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{(ms^2 + ds + K)} \frac{1}{s} = -\frac{1}{K}$$

Funktionen $sY(s)$ har samtliga poler i vänstra halvplanet då parametrarna m , d och K är positiva.

- b. Samma uppgift med $G_R(s) = K_1 + K_2/s$. Då gäller

$$e(\infty) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{(ms^2 + ds + K_1 + \frac{K_2}{s})} \frac{1}{s} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{ms^3 + ds^2 + K_1s + K_2} = 0$$

under förutsättning av stabilitet. Stabilitet gäller om $m > 0$, $d > 0$ och $K_1 > \frac{m}{d}K_2 > 0$. Regel: Om störningen är ett steg så skall man ha minst en integrator före den punkt i blockschemat där störningen kommer in, för att det stationära felet skall bli noll.

4.3

- a. För slutna systemet gäller, då $R = 0$, att

$$U(s) = K(0 - Y(s)) = -K(G_P(s)U(s) + N(s))$$

varur man erhåller

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{-K}{1 + KG_P(s)} N(s) \\ Y(s) &= G_P(s)U(s) + N(s) = \frac{1}{1 + KG_P(s)} N(s) \end{aligned} \quad (4.1)$$

- b. Insättning av $G_P(s) = \frac{1}{s+1}$ i ekv. (4.1) ger sambanden

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{-K(s+1)}{s+1+K} N(s) \\ Y(s) &= G_P(s)U(s) + N(s) = \frac{s+1}{s+1+K} N(s) =: G_{yn}(s)N(s) \end{aligned}$$

Stationärt gäller att

$$\begin{aligned} y(t) &= A|G_{yn}(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_{yn}(i\omega)) \\ &= A \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(K+1)^2 + \omega^2}} \sin\left(\omega t + \arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{K+1}\right) \\ u(t) &= -Ky(t) \\ &= -KA \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(K+1)^2 + \omega^2}} \sin\left(\omega t + \arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{K+1}\right) \end{aligned}$$

- c. Med $A = 1$ och $K = 1$ blir amplituderna för svängningarna i u och y

$$\begin{aligned} A_u &= \sqrt{\frac{1+\omega^2}{4+\omega^2}} \\ A_y &= \sqrt{\frac{1+\omega^2}{4+\omega^2}} \end{aligned}$$

För $\omega = 0.1$ rad/s blir amplituderna

$$\begin{aligned} A_u &\approx 0.5 \\ A_y &\approx 0.5 \end{aligned}$$

medan $\omega = 10$ ger

$$\begin{aligned} A_u &\approx 1 \\ A_y &\approx 1 \end{aligned}$$

- 4.4 Med $G_P(s) = 1/(Js^2)$ får vi

$$\begin{aligned} E(s) &= \theta_{ref}(s) - \theta(s) = \\ &= \theta_{ref}(s) - G_P(s)(M(s) + KG_R(s)E(s)) \Rightarrow \\ E(s) &= \frac{1}{1 + KG_P(s)G_R(s)} \theta_{ref}(s) - \frac{G_P(s)}{1 + KG_P(s)G_R(s)} M(s) \end{aligned}$$

Antag stegändringar i störmoment M^o och referensvärde θ_{ref}^o . Vi ansätter $G_R(s) = Q(s)/P(s)$. Detta ger

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1 + K \frac{Q(s)}{Js^2 P(s)}} \cdot \frac{\theta_{ref}^o}{s} - \frac{\frac{1}{Js^2}}{1 + K \frac{Q(s)}{Js^2 P(s)}} \cdot \frac{M^o}{s} \\ &= \frac{s^2 JP(s)}{s^2 JP(s) + KQ(s)} \cdot \frac{\theta_{ref}^o}{s} - \frac{P(s)}{s^2 JP(s) + KQ(s)} \cdot \frac{M^o}{s} \end{aligned}$$

Det stationära felet blir

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= 0 - \frac{P(0)}{KQ(0)} M^o = -\frac{P(0)}{KQ(0)} M^o \end{aligned}$$

där vi förutsatt att $Q(0) \neq 0$ samt att förutsättningarna för slutvärdesteoremet är uppfyllda. Vi ser att $P(0) = 0$ ger $e_\infty = 0$. Ett villkor för att en stegändring i störmoment ej skall ge något bestående vinkelfel blir alltså att regulatorn $G_R(s)$ skall ha minst en pol i origo ($P(0) = 0$).

4.5 Insignalen till termoelementet är badets temperatur $u(t)$, vilket ger

$$u(t) = t \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s^2}$$

Utsignalen $y(t)$ är temperaturgivarens utslag. Då gäller

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{1+sT} \cdot \frac{1}{s^2}$$

För felet $e(t) = u(t) - y(t)$ gäller

$$E(s) = U(s) - Y(s) = \frac{1}{s^2} \left[1 - \frac{1}{1+sT} \right] = \frac{sT}{1+sT} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Stationära värdet av felet fås mha slutvärdesteoremet:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 T}{1+sT} \frac{1}{s^2} = T = 10$$

Termoelementet visar alltså i stationärt tillstånd 10°C för lite, dvs badets verkliga temperatur är $102.6^\circ\text{C} + 10^\circ\text{C} = 112.6^\circ\text{C}$.

Observera att felet som i detta fall kan ha ett konstant gränsvärde trots att både $u(t)$ och $y(t)$ saknar gränsvärde då $t \rightarrow \infty$. Det är *skillnaden* mellan u och y som blir konstant efter lång tid.

4.6 Eftersom lutningen är -2 vid låga frekvenser innehåller överföringsfunktionen en dubbelintegrator. Vid brytfrekvensen $\omega_{b1} = 1$ ändras lutningen från -2 till 0 , vilket innebär att det finns ett dubbelt nollställe vid denna frekvens. Vid $\omega_{b2} = 5$ ändras lutningen från 0 till -1 , vilket innebär att det finns en pol vid denna frekvens. Överföringsfunktionen för det öppna systemet blir därför

$$G_0(s) = \frac{K(1+sT_1)^2}{s^2(1+sT_2)}$$

där $T_1 = 1/\omega_{b1} = 1$ och $T_2 = 1/\omega_{b2} = 0.2$.

Lågfrekvensasymptoten är

$$G_{LF}(s) = \frac{K}{s^2}$$

där konstanten K ges av

$$|G_{LF}(i\omega)| = \frac{K}{\omega^2}$$

Ur Bodediagrammet kan man avläsa att $|G_{LF}(i\omega)| = 1$ då $\omega = 1$. Detta ger att $K = 1$.

Det slutna systemet har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$$

Utsignalen är $Y(s) = G(s)R(s)$ och felet $E(s)$ blir

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1+G_o} R(s) = \frac{s^2(1+0.2s)}{s^2(1+0.2s) + (1+s)^2} R(s)$$

a.

$$\begin{aligned} R(s) = \frac{a}{s} \quad \Rightarrow \quad e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{as^2(1 + 0.2s)}{s^2(1 + 0.2s) + (1 + s)^2} = 0 \end{aligned}$$

Systemet kan alltså följa insignalen $r(t) = a$ utan stationärt fel.

b.

$$\begin{aligned} R(s) = \frac{b}{s^2} \quad \Rightarrow \quad e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{bs(1 + 0.2s)}{s^2(1 + 0.2s) + (1 + s)^2} = 0 \end{aligned}$$

Systemet kan även följa insignalen $r(t) = bt$ utan stationärt fel.

c.

$$\begin{aligned} R(s) = \frac{2c}{s^3} \quad \Rightarrow \quad e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2c(1 + 0.2s)}{s^2(1 + 0.2s) + (1 + s)^2} = 2c \neq 0 \end{aligned}$$

Insignalen $r(t) = ct^2$ ger ett stationärt fel.

d. Eftersom det slutna systemet är linjärt och tidsinvariant gäller superpositionsprincipen. Insignalen är summan av insignalerna i uppgift a och b, varför det stationära felet blir summan av felen i dessa fall. Vi får alltså det stationära felet $e_\infty = 0 + 0 = 0$.

e. Insignalen $r(t) = \sin(t)$ ger

$$\begin{aligned} R(s) = \frac{1}{1 + s^2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) &= \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2(1 + 0.2s)}{(s^2(1 + 0.2s) + (1 + s)^2)(1 + s^2)} = 0 \end{aligned}$$

men med insignalen $r(t) = \sin(t)$ får vi sedan initialtransienterna avklingat en utsignal $y(t) = y_o \sin(t + \phi)$, där

$$y_o = |G(i)| ; \quad \phi = \arg G(i)$$

Felet $e(t) = r(t) - y(t)$ blir därmed också en sinussvängning, och gränsvärdet

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

existerar ej. Detta visar att slutvärdesteoremet ej kan användas okritiskt, utan endast får användas i de fall då ett gränsvärde verkligen existerar. Kravet är att alla poler hos $sE(s)$ måste ha negativ realdel. (Faktorn $s^2 + 1$ i nämnaren ger två poler på imaginära axeln).

4.7

a. Känslighetsfunktionen ges av

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_P(s)G_R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{6.5}{(s+1)^3}} = \frac{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 7.5}$$

b. Vid $\omega = 0$ är $|S(i\omega)| = 1/7.5$. Lågfrekventa laststörningar dämpas alltså med en faktor 7.5.

- c. Känslighetsfunktionen har största värdet $|S(i\omega)| \approx 10$ vid $\omega \approx 1.6$ rad/s.

4.8

- a. Den övre kurvan är den komplementära känslighetsfunktionen och den nedre är känslighetsfunktionen. Den komplementära känslighetsfunktionen är överföringsfunktionen från referensvärde r till utsignal y , och där vill man normalt att förstärkningen ska vara 1 vid låga frekvenser så att $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r(t)$.
- b. Störningar vid olika frekvenser förstärks enligt vad som visas i amplitudkurvan för känslighetsfunktionen. Störningar under 0.2 rad/s reduceras alltså, störningar mellan 0.2 och 2 rad/s förstärks, och störningar däröver passerar rakt igenom. Värst förstärkning, 2, fås vid frekvensen 0.55 rad/s.
- c. Den komplementära känslighetsfunktionen, vilket motsvarar slutna systemets överföringsfunktion från r till y , ligger nära 1 upp till ca 0.7 rad/s.
- d. Den maximala beloppet av känslighetsfunktionen är lika med inversen av det minsta avståndet mellan Nyquistkurvan och punkten -1 . Det minsta avståndet är således $1/2 = 0.5$. Avståndet till -1 då Nyquistkurvan skär den negativa reella axeln måste då också vara minst 0.5. Detta innebär i sin tur att amplitudmarginalen är minst 2.

4.9

Det slutna systemet har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{G_o}{1 + G_o} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

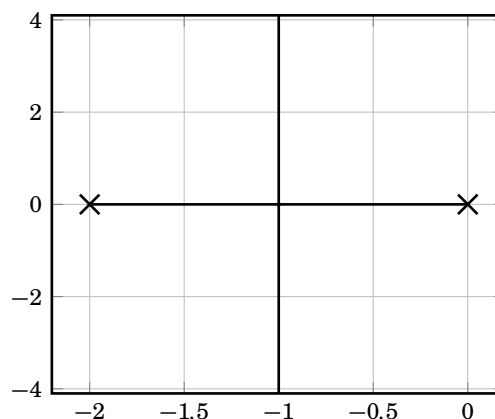
Det slutna systemets poler ges av den karaktäristiska ekvationen

$$s^2 + 2s + K = 0 \Rightarrow s = -1 \pm \sqrt{1 - K}$$

Då $K = 0$ erhålles rötterna $s_{1,2} = 0, -2$, dvs det öppna systemets poler. Det slutna systemet $G(s)$ har en dubbelrot i $s = -1$ då $K = 1$, och då $K \rightarrow \infty$ blir rötterna

$$s_{1,2} = -1 \pm i\infty$$

Rotorten, dvs rötterna till den karaktäristiska ekvationen då K varierar visas i figur S4.1.



Figur S4.1 Rotort för systemet i problem 4.9.

4.10

Kretsöverföringen hos systemet är

$$G_o(s) = \frac{K(s+10)(s+11)}{s(s+1)(s+2)} = K \frac{Q(s)}{P(s)}$$

Det slutna systemet blir

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{KQ(s)}{P(s) + KQ(s)}$$

Karakteristisk ekvation:

$$\begin{aligned} P(s) + KQ(s) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ s(s+1)(s+2) + K(s+10)(s+11) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ s^3 + (3+K)s^2 + (2+21K)s + 110K &= 0 \end{aligned}$$

- a. Villkor för stabilitet är att alla koefficienter i karaktäristiska polynomet

$$s^3 + (3+K)s^2 + (2+21K)s + 110K$$

är positiva, samt att

$$(3+K)(2+21K) > 110K$$

Olikheten ger

$$K^2 - \frac{15}{7}K + \frac{2}{7} > 0$$

Denna är uppfylld för $K > 2$ samt $K < 1/7$. Det slutna systemet är alltså stabilt för

$$0 < K < \frac{1}{7}$$

samt då

$$K > 2$$

- b. Sök rotorten för den karakteristiska ekvationen, $P(s) + KQ(s) = 0$:

$$s(s+1)(s+2) + K(s+10)(s+11) = 0 \quad (4.2)$$

Sätt $n =$ gradtalet hos $P(s)$ och $m =$ gradtalet hos $Q(s)$. Rotorten har $\max(n, m) = 3$ grenar.

Startpunkter:

$$P(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 0, -1, -2$$

Ändpunkter:

$$Q(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -10, -11$$

Den tredje grenen kommer att gå mot oändligheten.

Till höger om varje punkt på reella axeln som ingår i rotorten skall finnas ett udda antal nollställen till $P(s)$ och $Q(s)$. De punkter x som uppfyller detta är

$$x < -11 \quad -10 < x < -2 \quad -1 < x < 0$$

Rotorten har $|n - m| = 1$ asymptot. Eftersom intervallet $x < -11$ på reella axeln tillhör rotorten är negativa reella axeln asymptot.

Skärningspunkter med imaginära axeln erhålles genom att sätta $s = i\omega$ i ekvation (4) ovan, vilket ger

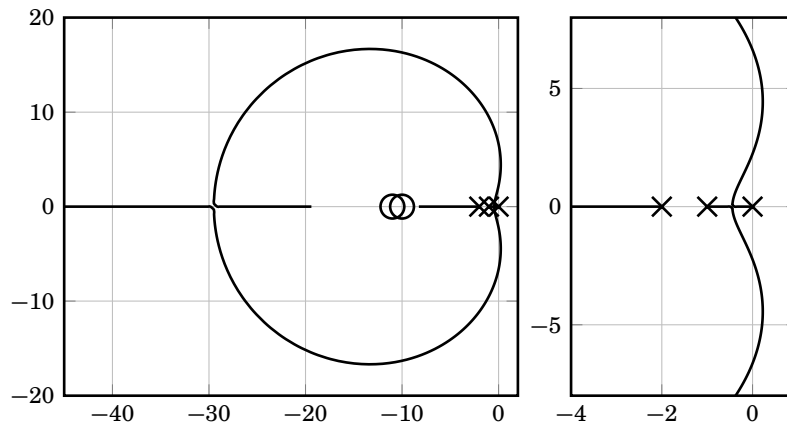
$$-(3+K)\omega^2 + 110K + i(-\omega^3 + (2+21K)\omega) = 0$$

Denna ekvation har lösningen $\omega = K = 0$ samt

$$\begin{cases} -(3+K)\omega^2 + 110K = 0 \\ \omega^2 - (2+21K) = 0 \end{cases}$$

vilket ger $K = 1/7$, $\omega = \pm\sqrt{5}$ eller $K = 2$, $\omega = \pm\sqrt{44}$.

Vi vet från uppgift a ovan att det slutna systemet är instabilt då $1/7 < K < 2$. För dessa värden på K ligger alltså rotorten i högra halvplanet. Rotortens utseende framgår av Figur S4.2.



Figur S4.2 Rotort för systemet i problem 4.10. Den högra figuren är en förstoring av området närmast origo.

4.11

- a. Systemets kretsöverföring är

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Det slutna systemet har överföringsfunktionen

$$G_{cl}(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+2) + K}$$

Systemet är asymptotiskt stabilt om samtliga nollställen till det karakteristiska polynomet

$$s(s+1)(s+2) + K = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

har negativ realdel. Det har de om alla koefficienter är positiva och om

$$3 \cdot 2 > K$$

Systemet är alltså asymptotiskt stabilt om $0 < K < 6$.

- b. Nu vill vi studera hur stationära felet beror av K när referensen växer linjärt med tiden. Reglerfelets Laplacetransform ges av

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \left(1 - \frac{G_0}{1 + G_0}\right)R(s) = \frac{1}{1 + G_0}R(s) = \frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2) + K}R(s)$$

Med $r(t) = 0.1t$, d.v.s. $R(s) = 0.1/s^2$, får vi

$$E(s) = \frac{0.1(s+1)(s+2)}{s(s(s+1)(s+2) + K)}$$

Om $0 < K < 6$ så har $sE(s)$ alla poler i vänstra halvplanet enligt a-uppgiften och vi kan använda slutvärdesteoremet:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{0.1(s+1)(s+2)}{s(s(s+1)(s+2) + K)} = \frac{0.2}{K}$$

För att få ett stationärt fel mindre än 5 mV för den givna referensen, krävs det att $K > 40$. För så stora värden på K är systemet emellertid inte stabilt. Specifikationen är alltså omöjlig att uppfylla.

- 4.12** Enligt Nyquist-teoremet är det återkopplade systemet stabilt precis för de $K > 0$ sådana att

- a. $K < 2$
- b. $K < 1/1.5 = 2/3$
- c. $K < 1/1.5 = 2/3$
- d. $K < 1/(2/3) = 1.5$

4.13 Nyquistkurvan skär negativa reella axeln då $\arg(G_0(i\omega)) = -\pi$, d.v.s. då

$$-3 \arctan(\omega) = -\pi$$

Detta är uppfyllt då

$$\omega = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Skärningspunkten ges av

$$|G_0(i\sqrt{3})| = \frac{1}{8}$$

Det betyder att systemet är stabilt för $K < 8$.

4.14 Systemet är stabilt för

$$0 < K < \frac{1}{3.5} \Leftrightarrow 0 < K < 0.29$$

samt

$$1 < K < \frac{1}{0.5} \Leftrightarrow 1 < K < 2$$

4.15 Problemet löses enklast med hjälp av Nyquistkriteriet. Processens överföringsfunktion är

$$G_P(s) = \frac{e^{-9s}}{(1 + 20s)^2}$$

Processens fasvridning är

$$\arg G_P(i\omega) = -9\omega - 2 \arctan(20\omega)$$

Vi vill ta reda på vid vilken frekvens fasvridningen är -180° . Detta får vi genom att lösa ekvationen

$$-9\omega - 2 \arctan(20\omega) = -\pi$$

Denna ekvation går inte att lösa analytiskt. Däremot kan man lösa den numeriskt på olika sätt. Lösningen är

$$\omega_0 \approx 0.1$$

Nästa steg är att bestämma processens förstärkning vid denna frekvens.

$$|G(i\omega_0)| = \frac{1}{1 + 400\omega_0^2} = 0.2$$

Detta ger oss förstärkningsmarginalen

$$A_m = \frac{1}{0.2} = 5$$

Förstärkningen $K = 5$ är alltså den högsta förstärkning som kan tillåtas.

4.16 Kretsöverföringsfunktionen är

$$G_0(s) = G_P(s)G_R(s) = e^{-sL} \cdot \frac{10(1 + \frac{1}{2s})}{(1 + 10s)} = e^{-sL} \cdot \frac{5(1 + 2s)}{s(1 + 10s)}$$

Skärfrekvensen beräknar vi genom att undersöka vid vilken frekvens kretsöverföringsfunktionen har beloppet ett.

$$|G_0(i\omega_c)| = \frac{5\sqrt{1 + 4\omega_c^2}}{\omega_c\sqrt{1 + 100\omega_c^2}} = 1$$

Ekvationen kan lösas numeriskt eller analytiskt.

$$\begin{aligned} 25(1 + 4\omega_c^2) &= \omega_c^2(1 + 100\omega_c^2) \\ \omega_c^4 - 0.99\omega_c^2 - 0.25 &= 0 \\ \omega_c^2 &\approx 1.199 \\ \omega_c &\approx 1.1 \text{ rad/min} \end{aligned}$$

Vid denna frekvens är

$$\arg G_0(i\omega_c) = \arctan 2\omega_c - \arctan 10\omega_c - 90^\circ - \omega_c L$$

Villkoret på fasmarginalen, $\varphi_m \geq 10^\circ$, ger

$$\begin{aligned} \varphi_m &= 180^\circ + \arg G_0(i\omega_c) \\ &= 180^\circ + \arctan 2\omega_c - \arctan 10\omega_c - 90^\circ - \omega_c L \\ &\approx 70^\circ - \omega_c L \geq 10^\circ \end{aligned}$$

Detta ger följande gräns för dödtiden L :

$$L \leq \frac{60}{\omega_c} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 \text{ min}$$

Transportfördröjningen får alltså maximalt vara 1 minut.

4.17

- Rätt. $A_m = 1/|KG_P(i\omega_0)|$ där ω_0 är frekvensen då Nyquistkurvan skär negativa reella axeln.
- Rätt. $\varphi_m = \pi + \arg G_P(i\omega)$ då $|G_P(i\omega)| = 1$.
- Fel. Då K minskas kommer varje punkt på Nyquistkurvan att flyttas mot origo. Härav följer att fasmarginalen ökar då K minskar.
- Rätt. Systemet är stabilt för $K = 1$, och $G_P(s)$ har samtliga poler i vänster halvplan. Det förenklade Nyquistkriteriet kan då användas. För $K = 2$ ligger punkten -1 till höger om Nyquistkurvan då denna genomlöpes i för ökande ω , och det slutna systemet är då instabilt.

4.18

- Detta är definitionen på amplitudmarginalen. Ur diagrammet ser man att när fassen är -180° så är förstärkningen ungefär 0.4. Detta ger en amplitudmarginal på ungefär $1/0.4 = 2.5$.
- Detta är definitionen på fasmarginalen. Ur diagrammet ser man att när amplituden är 1 så är fassen ungefär -140° . Detta ger en fasmarginal på ungefär $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

4.19 Skärfrekvensen avläses till $\omega_c = 0.07$ och fasmarginalen till $\varphi_m = 40^\circ$. Dödtidsmarginalen blir

$$L_m = \frac{\varphi_m}{\omega_c} = \frac{40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}}{0.07} = 10$$

Lösningar till övningsexemplen 5

Tillståndsåterkoppling och Kalmanfiltrering

5.1 a. Styrbarhetsmatris:

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 1-\beta \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

vilket ger $\det W_s = -\beta - 1$, dvs styrbarhet för alla $\beta \neq -1$.

b. Observerbarhetsmatris:

$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & -2\gamma \end{pmatrix}$$

vars determinant alltid är 0, dvs systemet är inte observerbart för något värde på γ .

5.2 Styrbarhetsmatrisen ges av

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

De styrbara tillstånden bestäms av kolumnerna till W_s och kan skrivas $\alpha(2, -1)^T$, där α är en skalär.

5.3

$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi ser att W_o är singular ($\det W_o = 0$). Tillståndet x är icke observerbart om och endast om

$$W_o x = 0$$

Vi får att x är ett icke observerbart tillstånd om och endast om $x_1 + x_2 = 0$. De icke observerbara tillstånden ges av

$$x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

där α är ett tal $\neq 0$.

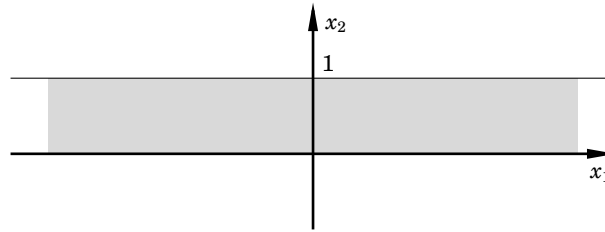
5.4 Styrbarhetsmatrisen

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

är singular, varför systemet ej är styrbart. Vi kan dock göra en mera detaljerad undersökning: Systemet kan skrivas:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + u, & x_1(0) = 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_2, & x_2(0) = 1 \end{cases}$$

Av detta framgår att $x_2(t) = x_2(0)e^{-2t} = e^{-2t}$ oberoende av vilken styrsignal u som används. Däremot kan x_1 styras med u till vilket värde som helst. Detta innebär att $x_2 \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$. De punkter (x_1, x_2) som kan passeras vid något $t < \infty$ utgörs av remsan $0 < x_2 < 1$ (se figur S5.1). På ändlig tid kan alltså endast punkterna $\begin{pmatrix} 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 10 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ uppnås.



Figur S5.1 Uppnåeliga tillstånd i uppgift 5.4.

5.5 Systemet är styrbart ty kolonnerna i styrbarhetsmatrisen

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende.

5.6 a. Kolonnerna i styrbarhetsmatrisen

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

är linjärt beroende, så systemet är ej styrbart. De tillstånd som kan nås på ändlig tid från origo bestäms av kolonnerna i W_s . De styrbara tillstånden är $x = konst \cdot (1 \ 0)^T$.

b. $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = 5/(s + 2)$.

c. Minimal tillståndsbeskrivning av $G(s)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5u \\ y = x \end{cases}$$

5.7 a. Sant. Eftersom systemet är styrbart kan man placera det slutna systemets poler godtyckligt genom linjär återkoppling från samtliga tillståndsvariabler.

b. Falskt. En linjär tillståndsåterkoppling påverkar inte det slutna systemets nollställen.

c. Sant om systemet är observerbart.

d. Sant om systemet $\mathcal{S}$ är observerbart.

5.8 Det slutna systemet blir

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BL)x + Bl_r r \\ y = Cx \end{cases}$$

Den karakteristiska ekvationen blir

$$\det(sI - A + BL) = s^2 + (3 + l_1 + 2l_2)s + 2(1 + l_1 + l_2) = 0$$

Vi vill ha $(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16 = 0$. Identifiering av koefficienter ger $l_1 = 9$, $l_2 = -2$. Det slutna systemet har överföringsfunktionen $G(s) = C(sI - A + BL)^{-1}Bl_r$. Stationära förstärkningen $G(0) = 1$ om

$$G(0) = C(-A + BL)^{-1}Bl_r = \frac{l_r}{4} = 1$$

vilket ger $l_r = 4$.

5.9 a. Det slutna systemets karakteristiska polynom ges av

$$\det(sI - (A - BL)) = \begin{vmatrix} s + 0.5 + 3l_1 & 3l_2 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + (0.5 + 3l_1)s + 3l_2$$

Det önskade karakteristiska polynomet är

$$(s + 4 + 4i)(s + 4 - 4i) = s^2 + 8s + 32$$

Identifiering av koefficienter ger

$$L = \begin{pmatrix} 5/2 & 32/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & 10.7 \end{pmatrix}$$

Det slutna systemet har överföringsfunktionen $G_{yr}(s) = C(sI - A + BL)^{-1}Bl_r$. Den stationära förstärkningen är 1 om

$$G_{yr}(0) = C(-A + BL)^{-1}Bl_r = \frac{3}{32}l_r = 1$$

vilket ger $l_r = 32/3$.

b. Enligt tumregeln ska observerarpolerna väljas 1.5–2 ggr snabbare än tillståndsåterkopplingen. Välj t.ex. att placera Kalmanfiltrets poler på dubbla avståndet från origo, vilket leder till följande karakteristiska polynom:

$$(s + 8 + 8i)(s + 8 - 8i) = s^2 + 16s + 128$$

Kalmanfiltrets karakteristiska polynom ges av

$$\det(sI - (A - KC)) = \begin{vmatrix} s + 0.5 & k_1 \\ -1 & s + k_2 \end{vmatrix} = s^2 + (0.5 + k_2)s + 0.5k_2 + k_1$$

Identifiering av koefficienter ger

$$K = \begin{pmatrix} 120.25 \\ 15.5 \end{pmatrix}$$

5.10

a. Från blockschemat ser vi att

$$X_1 = \frac{1}{s}K_1U$$

$$X_2 = K_2\frac{1}{s}X_1$$

$$X_3 = \frac{1}{s}X_2$$

vilket ger

$$\dot{x}_1 = K_1u$$

$$\dot{x}_2 = K_2x_1$$

$$\dot{x}_3 = x_2$$

$$y = x_3$$

På matrisform får vi då

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} K_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

b. Styrlagen ges av

$$u = l_r - Lx$$

Slutna systemet blir

$$\dot{x} = Ax + B(l_r - Lx) = (A - BL)x + Bl_r$$

Polerna till det slutna systemet ges av egenvärdena till $A - BL$ dvs rötterna till slutna systemets karakteristiska ekvation:

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - BL)) &= \det \begin{pmatrix} s + K_1 l_1 & K_1 l_2 & K_1 l_3 \\ -K_2 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{pmatrix} \\ &= s^3 + K_1 l_1 s^2 + K_1 K_2 l_2 s + K_1 K_2 l_3 = 0 \end{aligned}$$

Alla polerna i -0.5 innebär att den karakteristiska ekvationen skall se ut som

$$(s + 0.5)^3 = s^3 + 1.5s^2 + 0.75s + 0.125 = 0$$

Man får direkt följande lösning:

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1.5}{K_1} \\ l_2 &= \frac{0.75}{K_1 K_2} \\ l_3 &= \frac{0.125}{K_1 K_2} \end{aligned}$$

5.11 Det utvidgade systemet blir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r = A_e x_e + B_e u + B_r r \end{aligned}$$

Vi ska finna $L_e = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ så att

$$\det(sI - (A_e - B_e L_e)) = (s + \alpha)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)$$

Insättning av A_e , B_e och L_e i uttrycket ovan ger

$$s^3 + l_2 s^2 + l_1 s - l_3 \equiv s^3 + (\alpha + 2\zeta\omega)s^2 + (\omega^2 + 2\zeta\omega\alpha)s + \alpha\omega^2$$

Identifiering av koefficienter ger nu

$$\begin{aligned} l_1 &= \omega^2 + 2\zeta\omega\alpha \\ l_2 &= \alpha + 2\zeta\omega \\ l_3 &= -\alpha\omega^2 \end{aligned}$$

5.12 Skattningsfelet $\tilde{x}$ uppfyller $\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$. där $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}^T$. Den kar. ekv. för skattningsfelet blir

$$\det(sI - (A - KC)) = s^2 + (4 + k_2)s + k_1 + 2k_2 + 3 = 0$$

Önskad kar. ekv. är

$$(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16 = 0$$

Identifiering av koefficienter ger $k_1 = 5$, $k_2 = 4$.

5.13 a. Slutna systemets karakteristiska ekvation ges av

$$\det(sI - (A - BL)) = \begin{vmatrix} s + 4 + l_1 & 3 + l_2 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + (4 + l_1)s + 3 + l_2 = 0$$

Önskade karaktäristiska ekvationen är

$$(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16 = 0$$

vilket ger $l_1 = 4$ och $l_2 = 13$. Styrlagen blir

$$u = -l_1 x_1 - l_2 x_2 = -4x_1 - 13x_2$$

b. Tillstånden skall skattas med ett Kalmanfilter, dvs

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

För $\tilde{x}$ gäller

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (A - KC)\tilde{x}$$

Bestäm K så att matrisen $A - KC$ får alla egenvärden $\lambda = -6$.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A + KC) &= \lambda^2 + (4 + k_1 + 3k_2)\lambda + 3 + 3k_1 + 9k_2 \\ &= (\lambda + 6)^2 = \lambda^2 + 12\lambda + 36 \end{aligned}$$

Identifiera koefficienterna och lös ut k_1 och k_2 :

$$\begin{cases} 4 + k_1 + 3k_2 = 12 \\ 3 + 3k_1 + 9k_2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + 3k_2 = 8 \\ k_1 + 3k_2 = 11 \end{cases}$$

Ekvationssystemet saknar lösning, se kommentar nedan.

c. Tillstånden skall skattas med ett Kalmanfilter, där egenvärdena till $A - KC$ skall väljas så att

$$\lambda^2 + (4 + k_1 + 3k_2)\lambda + 3 + 3k_1 + 9k_2 = (\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

Identifiera koefficienterna och lös ut k_1 och k_2 .

$$\begin{cases} 4 + k_1 + 3k_2 = 6 \\ 3 + 3k_1 + 9k_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + 3k_2 = 2 \\ k_1 + 3k_2 = 2 \end{cases}$$

Sålunda bara en ekvation kvar, vilket medför att det finns oändligt många lösningar, t.ex. $k_1 = 2$, $k_2 = 0$, eller $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{2}{3}$ osv.

Nackdelen med detta val av observerarpoler är att skattningen är långsammare än slutna systemet. Detta påverkar inte systemets reaktion på börvärdesändringar, vilken bestäms av det slutna systemets poler. Reaktionen på processstörningar blir emellertid långsammare, beroende på observerarens tröghet.

Kommentar

En kontroll av observerbarheten visar att

$$\det W_o = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

dvs systemet är inte observerbart. Beräkning av överföringsfunktionen ger att

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s + 3}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{s + 1}$$

Eigenvärdet i -3 svarar mot ett icke-observerbart tillstånd. Systemet är däremot styrbart, vilket följer av att systemet är realiserat på styrbar kanonisk form. Man kan skriva karakteristiska ekvationen till $A - KC$ som

$$\det(\lambda I - A + KC) = (\lambda + 3)(\lambda + k_1 + 3k_2 + 1)$$

Det betyder att ett Kalmanfilter måste skatta det icke-observerbara tillståndet med dess egen hastighet, dvs (minst) ett av egenvärdena till $A - KC$ måste placeras i -3 . Detta förklarar varför man misslyckas med att beräkna Kalmanfiltret då egenvärdena skall placeras i -6 , men lyckas då de placeras i -3 . Notera att i fall av denna typ blir resultatet att det antingen inte existerar någon lösning K till Kalmanfiltret, eller så finns det oändligt många. Då systemet är observerbart finns en entydig lösning K till Kalmanfiltret.

Lösningar till övningsexemplen 6

Designmetoder

6.1 a. Regulatorns frekvensfunktion ges av

$$G_R(i\omega) = K \left(1 + i(\omega T_d - \frac{1}{\omega T_i}) \right)$$

Förstärkningen och fasvridningen för en viss frekvens ω fås direkt ur regulatorns amplitudfunktion $A(\omega)$ resp. dess fasfunktion $\phi(\omega)$:

$$A(\omega) = |G_R(i\omega)| = K \sqrt{1 + (\omega T_d - \frac{1}{\omega T_i})^2}$$
$$\phi(\omega) = \arg G_R(i\omega) = \arctan(\omega T_d - \frac{1}{\omega T_i})$$

b. Amplitudfunktionen $A(\omega)$ har ett unikt minimum då $\text{Im } A(i\omega) = 0$ vilket innebär att

$$\omega_{\min} = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}}$$

Vid denna frekvens blir förstärkningen resp. fasvridningen

$$A(\omega_{\min}) = K$$
$$\phi(\omega_{\min}) = 0$$

Lägg märke till att fasvridningen är negativ för $\omega < \omega_{\min}$ (fasretardation) och positiv för $\omega > \omega_{\min}$ (fasavancering).

6.2 a. Den gråa amplitudkurvan är identisk med den nominella (svarta) förutom att den är höjd med en faktor 4. Detta är således fallet då K fyrdubblats. Observera att den gråa faskurvan inte syns i diagrammet eftersom den sammanfaller med den heldragna svarta faskurvan. Den prickade amplitudkurvan avviker från den nominella (heldragna) kurvan vid låga frekvenser för vilka den är lägre. Detta tyder på att T_i har ökat så att lågfrekvensförstärkningen har minskats. Lägg märke till att faskurvan samtidigt har höjts för lägre frekvenser. Den sista (streckade) kurvan måste uppenbarligen motsvara det fall då T_d ökat vilket stämmer eftersom förstärkningen har höjts med en faktor 4 vid höga frekvenser. Även i detta fall kan man se en viss fasavancering fast för något högre frekvenser.

Det gråa stegsvaret är snabbare och sämre dämpat än det nominella (svarta heldragna) stegsvaret. Detta är typiskt för en höjning av förstärkningen K . Motsvarande Bode-diagram visar mycket riktigt också att skärfrekvensen ω_c har ökat (snabbare) samtidigt som fasmarginalen minskat (sämre dämpat). I det prickade stegsvaret uppträder en långsam drift, både i referenssvaret och i lastsvaret. Observera referenssvarets relativt snabba uppgång till ca 0.8 varefter en långsam insvängning mot 1 tar vid. Detta måste bero på att integralverkan har minskat. Integraltiden T_i har således ökat i detta fall. Motsvarande Bode-diagram visar att ω_c är väsentligen oförändrad. Detta motsvaras i stegsvaret av att första delen har ungefär samma snabbhet som i det nominella fallet medan det därpå följande långsamma förloppet motsvaras av den minskade förstärkningen vid låga frekvenser. Det sista (streckade) stegsvaret svarar tydligen mot en ökning av derivatatiden T_d . Referenssvaret har en snabb uppgång i början med en därpå följande långsammare insvängning. Detta motsvaras i Bode-diagrammet av att förstärkningen ökat för höga frekvenser men är oförändrad för låga frekvenser. Lastsvaret är något långsammare och mer dämpat än i det nominella fallet.

- b. Den gråa amplitudkurvan är sänkt med en faktor 2 i förhållande till den nominella svarta, vilket motsvaras av minskning av K . Den gråa faskurvan sammanfaller därför med den nominella (svarta) faskurvan. Den prickade amplitudkurvan har höjts för låga frekvenser dvs T_i har minskats. Den streckade amplitudkurvan har sänkts vid höga frekvenser dvs T_d har minskat.

Det gråa stegsvaret är långsammare och mer dämpat än det nominella. Detta måste tyda på att K minskats eftersom varken en minskning av T_i eller en minskning av T_d skulle ge ett mer dämpat stegsvar. Detta bekräftas mha Bodediagrammen av att det enda fall då ω_c minskat är då K minskats. Det är också enda fallet då fasmarginalen ökat. Det två återstående stegsvaren är båda sämre dämpade än det nominella stegsvaret. För att kunna avgöra vilket av dessa stegsvar som svarar mot en minskning av T_i får vi titta på motsvarande Bode-diagram (det prickade). Detta visar att skärfrekvensen ω_c har ökat något jämfört med den nominella. Det streckade Bode-diagrammet visar däremot att minskningen av T_d inte har ändrat på ω_c . Det prickade stegsvaret är något snabbare i början än vad det nominella (heldragna svarta) stegsvaret är medan det streckade är ungefär lika snabbt i början som det nominella. Detta innebär att det prickade stegsvaret svarar mot en minskning av T_i medan det streckade svarar mot minskningen av T_d .

6.3 Processens överföringsfunktion ges av

$$G_P = \frac{C}{Js + D}$$

PI-regulatorns överföringsfunktion ges av

$$G_R = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right)$$

Slutna systemets överföringsfunktion G_{cl} ges av

$$G_{cl} = \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P}$$

Det karaktäristiska polynomet ges av nämnaren till G_{cl} och är

$$s^2 + \frac{D + CK}{J}s + \frac{CK}{JT_i}$$

Det önskade karakteristiska polynomet är

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{cases} K = \frac{2\zeta\omega J - D}{C} \\ T_i = \frac{2\zeta\omega J - D}{\omega^2 J} \end{cases}$$

6.4 Processens överföringsfunktion G_P ges av:

$$\Theta = G_P I = \frac{k_i}{Js^2 + Ds} I$$

PID-regulatorns överföringsfunktion G_R ges av:

$$I = G_R (\Theta_{ref} - \Theta) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) (\Theta_{ref} - \Theta)$$

där Θ_{ref} är Laplacetransformen av referensvärdet för θ . Slutna systemets överföringsfunktion G ges av

$$\Theta = G \Theta_{ref} = \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} \Theta_{ref}$$

Det karaktäristiska polynomet ges av nämnaren till G och är

$$s^3 + \frac{D + Kk_i T_d}{J} s^2 + \frac{Kk_i}{J} s + \frac{Kk_i}{JT_i}$$

Vi vill ha

$$(s + \alpha)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2) = s^3 + (\alpha + 2\zeta\omega)s^2 + (2\alpha\zeta\omega + \omega^2)s + \alpha\omega^2$$

Identifiering av koefficienter ger ekvationerna

$$\begin{cases} \frac{D + Kk_i T_d}{J} = \alpha + 2\zeta\omega \\ \frac{Kk_i}{J} = 2\alpha\zeta\omega + \omega^2 \\ \frac{Kk_i}{JT_i} = \alpha\omega^2 \end{cases}$$

varur man kan beräkna de sökta regulatorparametrarna:

$$\begin{cases} K = \frac{J}{k_i}(2\alpha\zeta\omega + \omega^2) \\ T_i = \frac{2\zeta}{\omega} + \frac{1}{\alpha} \\ T_d = \frac{\alpha + 2\zeta\omega - D/J}{2\alpha\zeta\omega + \omega^2} \end{cases}$$

6.5 a. Regulatorns överföringsfunktion är

$$G_r(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i}) = (1 + \frac{1}{s}) = \frac{s+1}{s}$$

Lågfrekvensasymptoten blir

$$G_r(s) \approx \frac{1}{s}$$

dvs beloppsskurvan är en rät linje med lutning = -1, och $\arg G_r(i\omega) = -90^\circ$. Vid brytfrekvensen $\omega_b = 1$ bryter beloppsskurvan uppåt till lutningen 0.

Högfrekvensasymptoten är $G_r(s) \approx 1$ med $|G_r(i\omega)| = 1$, dvs lutningen = 0, och $\arg G_r(i\omega) = 0$. Motsvarande Bodediagram visas i figur [S6.1](#).

b. Regulatorns överföringsfunktion är

$$G_r(s) = K(1 + T_d s) = 1 + s$$

Lågfrekvensasymptoten blir $G_r(s) \approx 1$, dvs beloppsskurvan är en rät linje med beloppet 1 och lutningen = 0, och faskurvan $\arg G_r(i\omega) = 0^\circ$. Vid brytfrekvensen $\omega_b = 1$ bryter beloppsskurvan uppåt till lutningen +1.

Högfrekvensasymptoten är $G_r(s) \approx s$, dvs beloppsskurvan har lutningen +1 och faskurvan $\arg G_r(i\omega) = +90^\circ$. Motsvarande Bodediagram visas i figur [S6.2](#).

6.6 Vid Ziegler-Nichols självsvängningsmetod genereras en svängning vid den frekvens ω_0 där processens fasvridning är -180° . Denna frekvens ges av

$$-2 \arctan 20\omega_0 - 9\omega_0 = -\pi$$

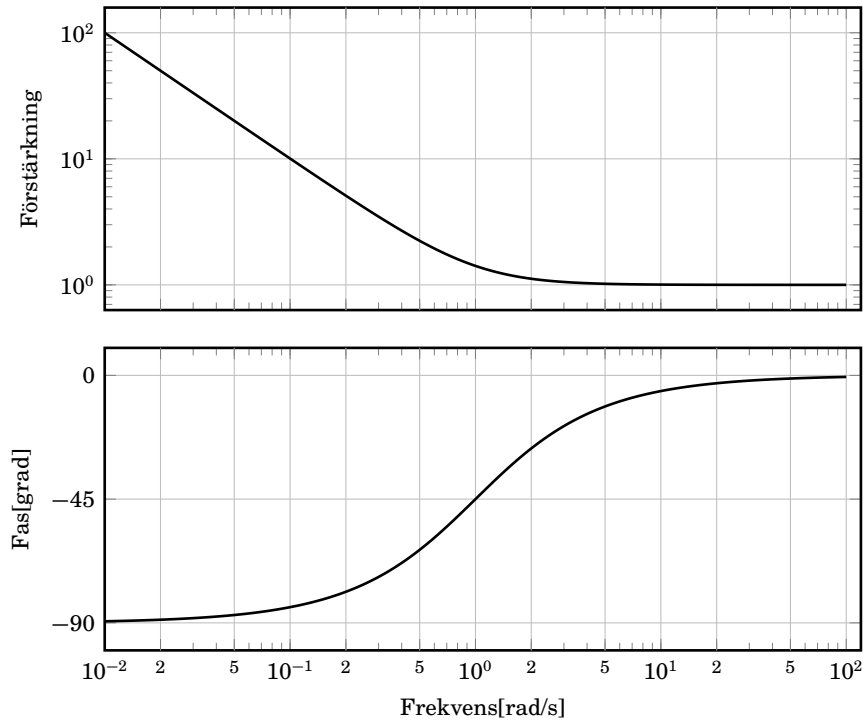
Numerisk lösning ger att $\omega_0 \approx 0.1$ rad/s.

Processens förstärkning vid ω_0 är

$$\frac{1}{1 + 20^2 \omega_0^2} = 0.2$$

Den kritiska förstärkningen K_c blir

$$K_c = \frac{1}{0.2} = 5$$



Figur S6.1 Bodediagram för PI-regulator med $K = 1$ och $T_i = 1$

och periodtiden är

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 63$$

Regulatorparametrarna blir

$$\begin{cases} K = 0.45K_c = 2.25 \\ T_i = T_o/1.2 = 53 \end{cases}$$

6.7

a. Laplacetransform av Martins dynamik ger

$$sX = -\frac{1}{30}X + \frac{1}{15}U$$

$$Y = X$$

och överföringsfunktionen $Y = G_P U$ kan bestämmas till

$$G_P = \frac{2}{30s + 1}$$

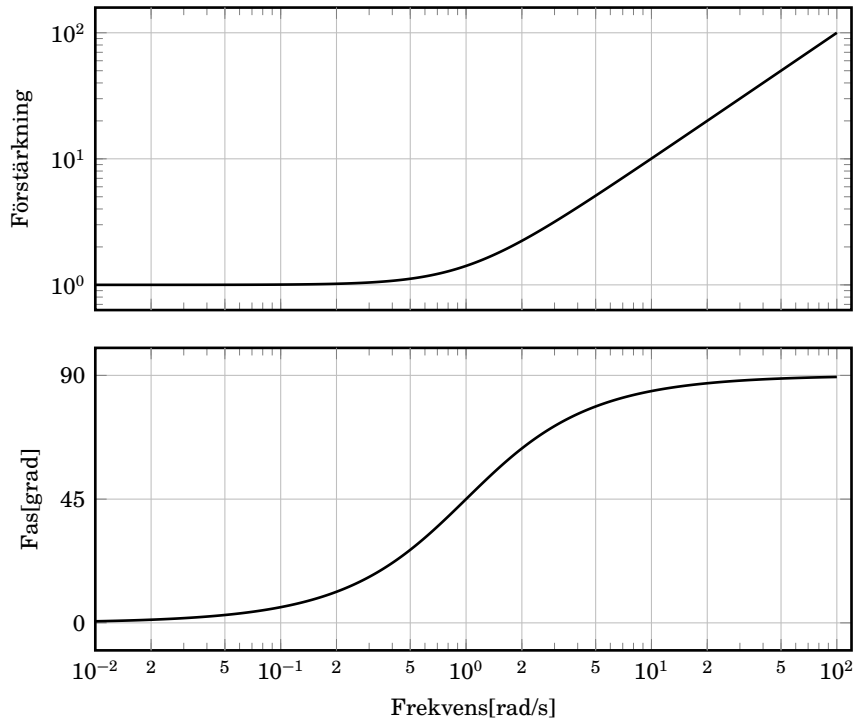
Processen regleras med en PI-regulator, $U = G_R(R - Y)$ där

$$G_R = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K \frac{T_i s + 1}{T_i s}$$

I uppgiften ska regulatorparametrarna K och T_i bestämmas så att det slutna systemets överföringsfunktion $Y = G_{cl} R$ har sina poler i -0.1 . Överföringsfunktionen från R till Y är

$$G_{cl} = \frac{G_P G_R}{1 + G_P G_R} = \frac{K \frac{T_i s + 1}{T_i s} \cdot \frac{2}{30s + 1}}{1 + K \frac{T_i s + 1}{T_i s} \cdot \frac{2}{30s + 1}}$$

$$= \frac{K(T_i s + 1)2}{T_i s(30s + 1) + K(T_i s + 1)2}$$



Figur S6.2 Bodediagram för PD-regulator med $K = 1$ och $T_d = 1$

vars nämnarpolynom har samma rötter som

$$s^2 + \frac{2K+1}{30}s + \frac{K}{T_i 15}$$

Man vill att dessa rötter ska vara -0.1 det vill säga de samma som för

$$(s + 0.1)^2 = s^2 + 0.2s + 0.01$$

Det blir dom om koefficienterna för polynomen är de samma och följande gäller

$$\begin{aligned} \frac{2K+1}{30} &= 0.2 \\ \frac{K}{T_i 15} &= 0.01 \end{aligned}$$

vilket medför att regulatorparametrarna blir

$$\begin{aligned} K &= 2.5 \\ T_i &= 16.7 \end{aligned}$$

- b.** Med Ziegler-Nichols frekvensmetod gör man ett experiment där man återkopplar processen med en P-regulator. Sedan ökar man förstärkningen tills systemet börjar självsvänga. Man kan tänka sig att Bodediagrammet är ritat för kretsöverföringsfunktionen när man använder en P-regulator med förstärkningen satt till 1. När man ökar förstärkningen kommer förstärkningskurvan i Bodediagrammet att flyttas uppåt och faskurvan kommer inte att påverkas. Systemet kommer att självsvänga när fasmarginalen blivit 0. I figuren ses att detta inträffar när skärfrekvensen är 0.3 rad/s eftersom faskurvan skär -180° i denna punkt, det är med denna vinkelfrekvens systemet kommer att självsvänga. För denna vinkelfrekvens kan amplituden avläsas till 0.2. Det behövs alltså en förstärkning på 5 för att systemet ska självsvänga. Enligt formelsamlingen blir PI-regulatorns parametrar

$$\begin{aligned} K &= 0.45K_0 \\ T_i &= T_0/1.2 \end{aligned}$$

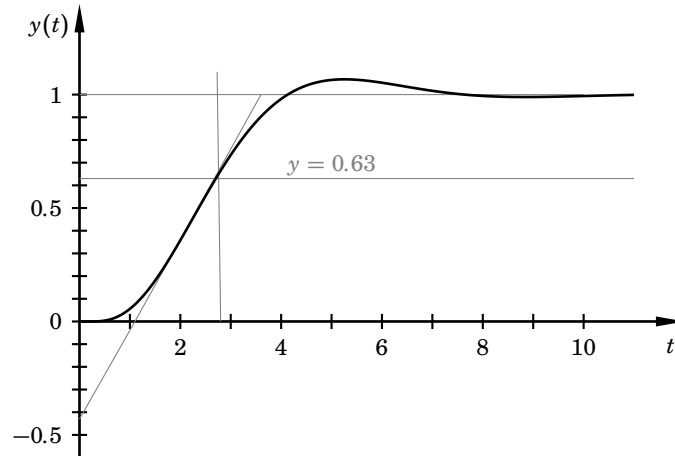
där K_0 är förstärkningen och T_0 periodtiden hos självsvängningen. Med

$$K_0 = 5$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{0.3} = 20.9$$

får man regulatorparametrarna $K = 2.25$ och $T_i = 17.4$.

6.8 Se fig. S6.3.



Figur S6.3 Stegsvär för systemet i uppgift 6.8 med några intressanta linjer inlagda

Ziegler-Nichols stegsvarsmetod: Med sedvanliga beteckningar erhålles $a = 0.4$ och $b = 1.1$. Regulatorparametrarna blir $K = 1.2/a = 3$, $T_i = 2b = 2.2$ och $T_d = b/2 = 0.55$.

Ziegler-Nichols självsvängningsmetod: Nyquistkurvan skär negativa reella axeln i punkten -0.4 då $\omega = 1.3$, vilket ger $T_0 = 2\pi/\omega = 4.8$ och $K_0 = 2.5$. Regulatorparametrarna blir $K = 0.6K_0 = 1.5$, $T_i = T_0/2 = 2.4$ och $T_d = T_0/8 = 0.6$.

Lambdametoden: Genom att dra tangenten till stegsvaret får man en uppskattning av dödtiden, $L \approx 1.1$ s. Stegsvaret har nått upp till 63% av sitt slutvärde efter ungefär 2.7s. Tidskonstanten blir därför $T = 2.7 - 1.1 = 1.6$ s. Statiska förstärkningen blir $K_p = 1$. Med $\lambda = T$ blir regulatorparametrarna för PI-regulatorn

$$K = \frac{1}{K_p} \frac{T}{L + \lambda} \approx 0.6$$

$$T_i = T = 1.6\text{s}$$

För en PID-regulator blir parametrarna

$$K = \frac{1}{K_p} \frac{L/2 + T}{L/2 + \lambda} = 1$$

$$T_i = T + L/2 = 2.15\text{s}$$

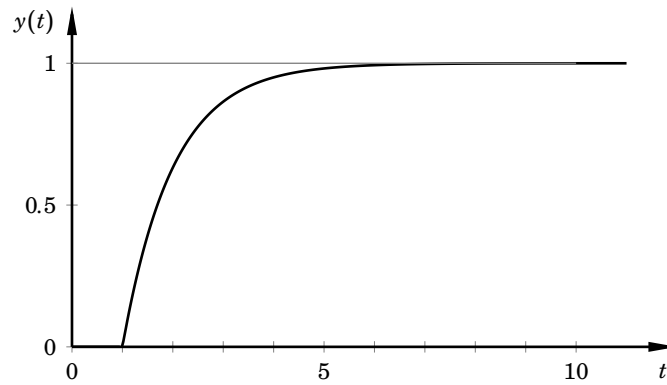
$$T_d = \frac{TL}{L + 2T} = 0.4\text{s}$$

6.9 a. Systemets stegsvar visas i figur S6.4.

Ur figuren avläser vi (med sedvanliga beteckningar) $a = b = 1$. Detta ger regulatorparametrarna $K = 1.2/a = 1.2$, $T_i = 2b = 2$ och $T_d = b/2 = 0.5$.

b. Självsvängningens frekvens bestäms av $\arg G(i\omega_0) = -\arctan \omega_0 - \omega_0 = -\pi$. Numerisk lösning ger $\omega_0 \approx 2.03$, varför $T = 2\pi/\omega_0 = 3.1$.

Vidare är $K_0 = 1/|G(i\omega_0)| = 2.26$, vilket ger regulatorparametrarna $K = 1.4$, $T_i = 1.5$ och $T_d = 0.39$.



Figur S6.4 Stegsvär för $G(s) = e^{-s}/(s+1)$.

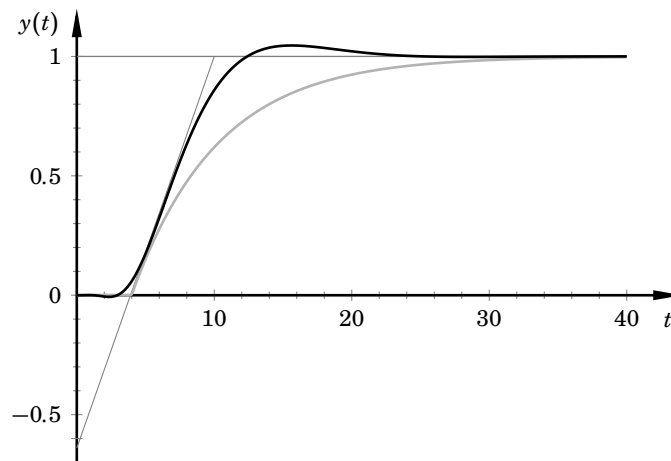
- c. Ur stegsvaret i a-uppgiften får vi processparametrarna $K_P = 1$, $L = 1$ och $T = 1$. Det ger regulatorparametrarna

$$K = \frac{1}{K_P} \frac{L/2 + T}{L/2 + \lambda} = 1$$

$$T_i = T + L/2 = 1.5$$

$$T_d = \frac{TL}{L + 2T} \approx 0.33$$

- 6.10 a.** Figuren tillåter ingen större noggrannhet. Drag tangenten till stegsvaret där derivatan är som störst, och studera skärningarna mellan tangenten och respektive koordinataxel. Parametern a ges av sträckan mellan 0 och skärningen med den vertikala axeln, och parametern b ges av sträckan mellan 0 och skärningen med den horisontella axeln. I vårt exempel blir $a = 0.65$ och $b = 4$. Ur tabellen fås följande regulatorparametrar: $K = 1.9$, $T_i = 8$ och $T_d = 2$.



- b. Den kritiska förstärkningen K_c är den förstärkning som gör att Nyquistkurvan går genom punkten -1. I vårt fall är $K_c = 1/0.55 = 1.8$. Kritiska periodtiden T_0 svarar mot frekvensen vid punkten 'o', d.v.s. $T_0 = 2\pi/\omega = 14.6$. Detta ger regulatorparametrarna: $K = 1.1$, $T_i = 7.3$ och $T_d = 1.8$.
- c. K är mindre i den sista metoden än i Ziegler-Nichols metoder.

- 6.11** Allmänt gäller att för att ω_c skall öka måste $|G_K(i\omega_c)| > 1$

A Systemets snabbhet ökar, men samtidigt försämras dess robusthet eftersom fasmarginalen minskar.

- B** $|G_K| \leq 1$ för alla ω , varför skärfrekvensen och snabbheten minskar.
C Enligt B
D $|G_K| = 1$ för alla ω , varför skärfrekvensen blir oförändrad.

6.12 Systemet är återkopplat med en proportionell regulator. Genom att lägga till en kompenseringsslänk vill man minska det återkopplade systemets rampfel en faktor 10. Samtidigt accepterar man en liten försämring av robusthetsegenskaperna (minskad fasmarginal) vilket innebär en viss försämring av de transienta egenskaperna.

Rampfelet kan vi påverka genom att införa en fasretarderande länk,

$$G_k(s) = M \frac{s+a}{sM+a}$$

Under förutsättning att systemet är stabilt blir rampfelet då

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G_k(s)G_P(s)} \cdot \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(sM+a)(s+1)(s+2)}{s(sM+a)(s+1)(s+2) + KM(s+a)} = \frac{2}{KM} \end{aligned}$$

Genom att välja $M = 10$ ($K = 1$) reduceras rampfelet till 0.2.

Nu återstår att välja värdet på a . Den fasretarderande länken innebär en fasförlust i kretsöverföringen. Fasförlusten är kraftigast omkring frekvensen $\omega = a/\sqrt{M}$. För att det återkopplade systemets transienta egenskaper inte skall försämrast alltför mycket, måste a väljas så att fasan omkring skärfrekvensen inte påverkas. Detta kan uppnås genom att välja a tillräckligt litet. Väljs däremot a alltför litet tar det lång tid för rampfelet att minska till värdet 0.2. Låt ω_c beteckna det okompenserade systemets skärfrekvens. Vid denna frekvens ger kompenseringsslänken fasbidraget

$$\arg G_k(i\omega_c) = \arctan \frac{\omega_c}{a} - \arctan \frac{M\omega_c}{a}$$

En enkel tumregel är att välja $a = 0.1\omega_c$. I vårt exempel innebär det att kompenseringsslänken ger en fasvridning på

$$\arg G_k(i\omega_c) = \arctan 10 - \arctan 100 \approx -5.1^\circ$$

Skärfrekvensen kan beräknas numeriskt enligt

$$|G_P(i\omega_c)| = \frac{1}{\omega_c \sqrt{1 + \omega_c^2} \sqrt{4 + \omega_c^2}} = 1$$

vilket ger $\omega_c \approx 0.4$.

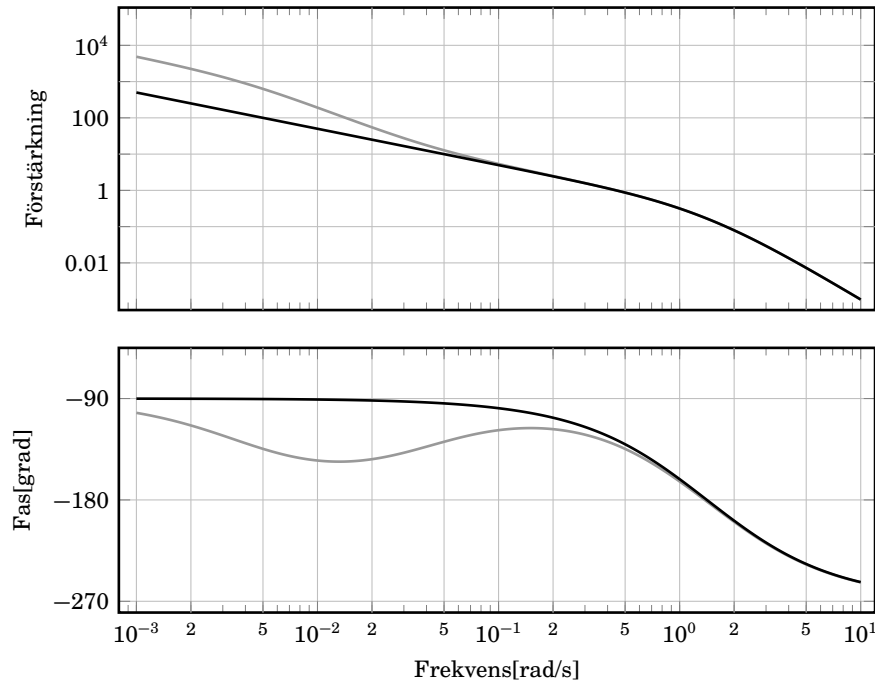
Kompenseringsslänken blir då

$$G_k(s) = 10 \frac{s+0.04}{10s+0.04} = \frac{s+0.04}{s+0.004}$$

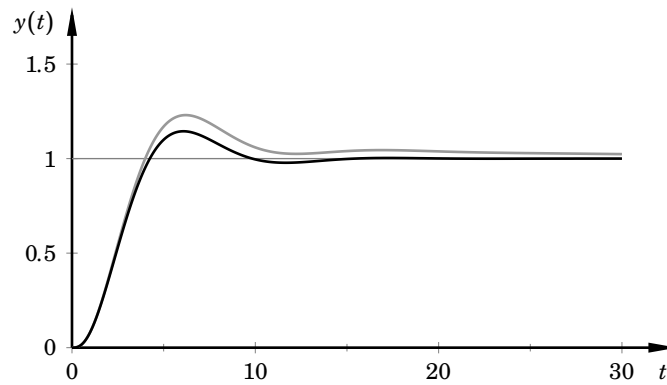
I figur S6.5 visas Bode-diagrammet för dels det öppna okompenserade systemet $KG_P(s)$ och dels för det öppna kompenserade systemet $KG_k(s)G_P(s)$.

Kompenseringsslänken förändrar systemets transienta egenskaper. I figur S6.6 ser vi hur stegsvarets översläng ökat jämfört med det okompenserade systemet. Även lösningstiden har ökat, delvis beroende på den långsamma mod som ingår i kompenseringsslänken.

Motivet för att införa kompenseringsslänken var att minska rampfelet. I figur S6.7 visas felet $e = r - y$ hos det okompenserade och det kompenserade systemet då referensvärdet $r = t$. Som framgår av figuren uppfyller det kompenserade systemet kravet att rampfelet skall vara mindre än 0.2.



Figur S6.5 Bode-diagram för det öppna okompenserade systemet (svart linje) och för det öppna kompen­serade systemet (grå linje) i problem 6.12. I båda fallen är $K = 1$.



Figur S6.6 Stegsvär hos det slutna okompenserade systemet (svart linje) och det kompen­serade (grå linje) systemet i problem 6.12.

6.13 Använd en fasavancerande kompenseringslänk

$$G_k(s) = KN \frac{s + b}{s + bN}$$

Det okompenserade systemets skärfrekvens ω_c kan avläsas ur Bodediagrammet i figur S6.8. Man kan även bestämma ω_c ur ekvationen

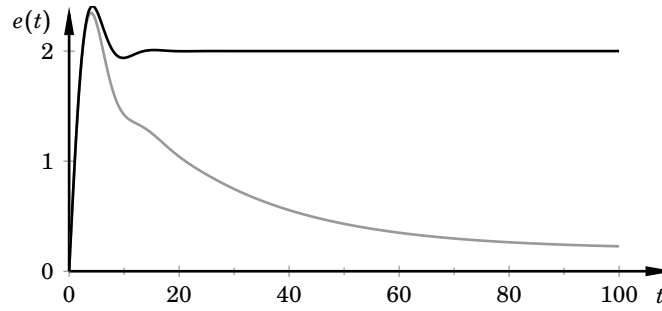
$$|G_P(i\omega_c)| = \frac{1.1}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 1}} = 1$$

Detta ger $\omega_c = 0.84$. Den nya skärfrekvensen väljs till $\omega_c^* = 1.68$. Det okompense­rade systemet har vid frekvensen ω_c fasförskjutningen

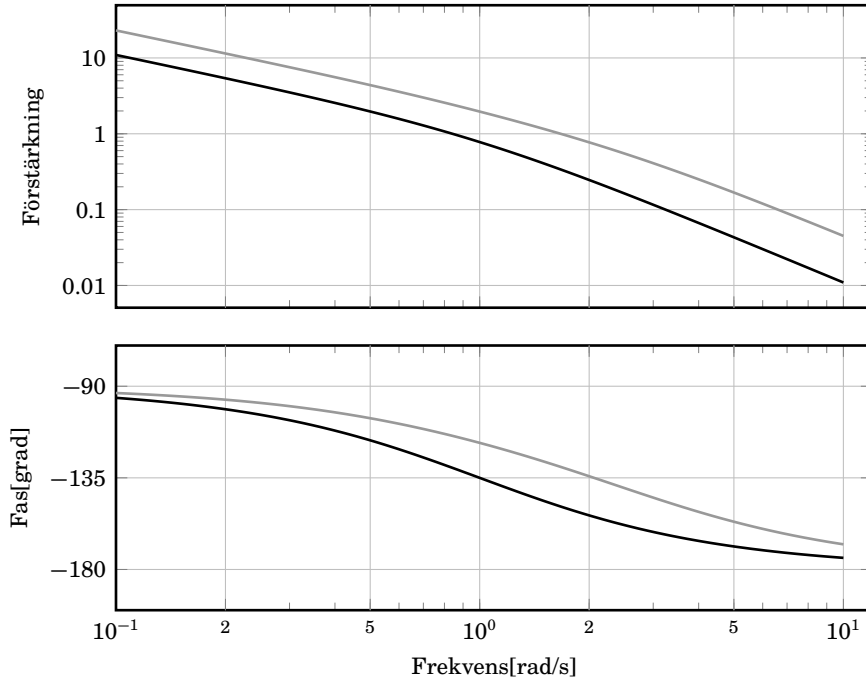
$$\arg G_P(i\omega_c) = -90^\circ - \arctan(0.84) = -130^\circ$$

För att fasmarginalen ej skall minska måste det gälla att

$$\arg(G_k(i\omega_c^*)G_P(i\omega_c^*)) \geq \arg G_P(i\omega_c)$$



Figur S6.7 Rampfel hos det slutna okompenserade systemet (heldragen linje) och det kompenserade (streckad linje) systemet i problem 6.12.



Figur S6.8 Bode-diagram för det öppna okompenserade systemet (svart linje) och för det öppna kompenserade systemet (grå linje) i problem 6.13.

Vi har

$$\arg G_P(i\omega_c^*) = -90^\circ - \arctan(1.68) = -149^\circ$$

För kompenseringslänken måste det då gälla att

$$\arg G_k(i\omega_c^*) \geq 19^\circ$$

Ur formelsamlingen finner vi att $N = 2$ duger. Kompenseringslänken har maximal fasförskjutning vid frekvensen $b\sqrt{N}$. Detta skall inträffa vid den nya skärfrekvensen, dvs

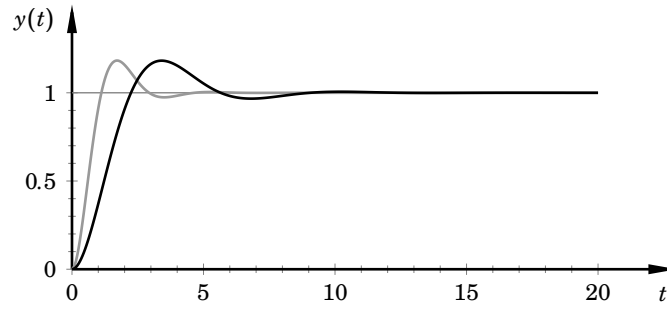
$$\omega_c^* = b\sqrt{N} \Rightarrow b = \frac{\omega_c^*}{\sqrt{N}} = 1.2$$

Välj nu K så att ω_c^* verkligen blir skärfrekvens (observera att $|G_k(i\omega_c^*)| = K\sqrt{N}$):

$$|G_k(i\omega_c^*)G_P(i\omega_c^*)| = 1 \Rightarrow K = 2.1$$

Vi får alltså kompenseringslänken

$$G_k(s) = 4.2 \frac{s + 1.2}{s + 2.4}$$



Figur S6.9 Stegsvär hos det slutna okompenserade (svart linje) och det kompenserade (grå linje) systemet i problem 6.13.

I figur S6.8 visas Bodediagrammet för det öppna okompenserade systemet $G_P(s)$ och för det öppna kompenserade systemet $G_k(s)G_P(s)$. Figur S6.9 visar stegsvaret hos det okompenserade och det kompenserade systemet.

6.14 Vi ska bestämma en fasavancerande länk

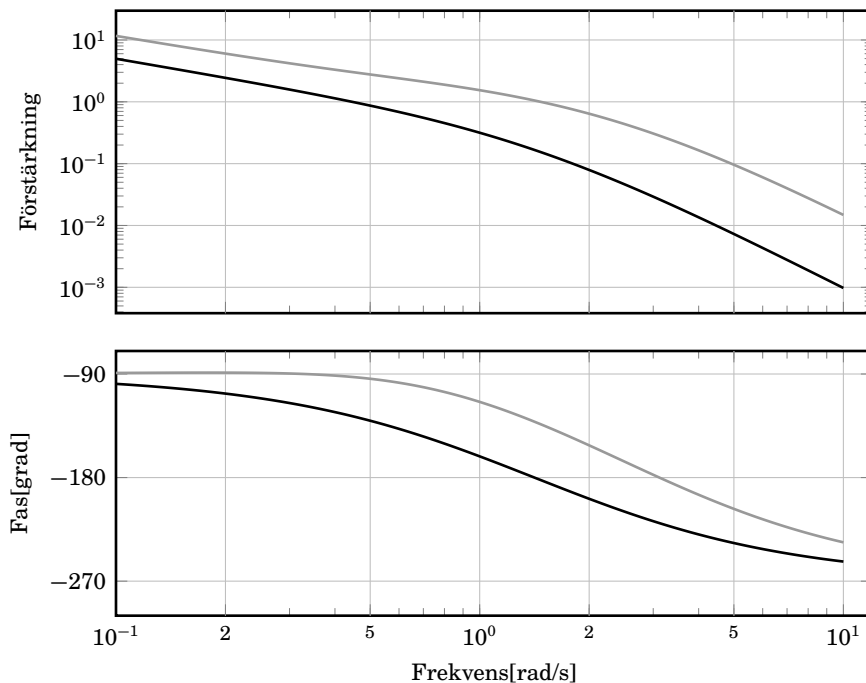
$$G_k(s) = K_K \cdot N \frac{s+b}{s+bN}$$

Specifikationerna innebär att lågfrekvensförstärkningen inte får minska (ty då ökar de stationära felen), skärfrekvensen skall bli 3 gånger högre och fasmarginalen skall vara oförändrad.

Det kompenserade systemet har kretsöverföringen

$$G_0(s) = G_k(s)G_1(s) = K_K \cdot N \frac{s+b}{s+bN} \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Bodediagrammet för G_1 visas i figur S6.10. Ur detta, eller från numeriska beräkningar, erhålles $\omega_c = 0.45$ rad/s och fasmarginalen $\varphi_m = 53^\circ$. Den nya skär-



Figur S6.10 Bodediagram för okompenserat system G_1 (svart linje) och kompenserat system $G_k G_1$ (grå linje) i problem 6.14.

frekvensen skall då vara $\omega_c^* = 3 \cdot \omega_c = 1.35$ rad/s med oförändrad fasmarginal.

Numeriska beräkningar ger att $\arg G_1(i\omega_c^*) \approx -180^\circ$. Därför måste faskurvan höjas ungefär 50° av G_k .

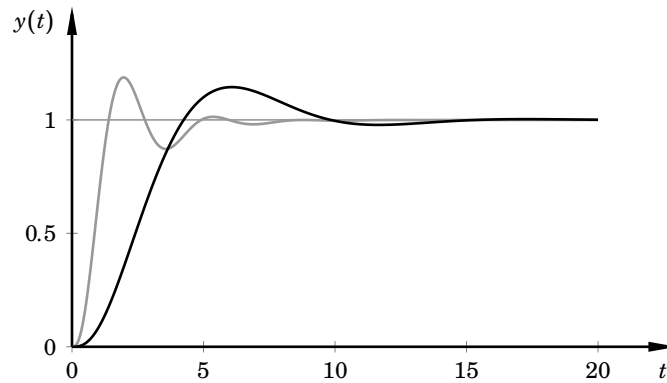
Ur diagram i formelsamlingen erhålles att $N = 8$ ger en maximal fasökning på ca 50° . Fasökningen är maximal vid frekvensen $b\sqrt{N} = \omega_c^*$, vilket ger $b = 0.48$. Vid den nya skärfrekvensen ω_c^* skall förstärkningen vara 1, dvs

$$|G_k(i\omega_c^*)| \cdot |G_1(i\omega_c^*)| = 1$$

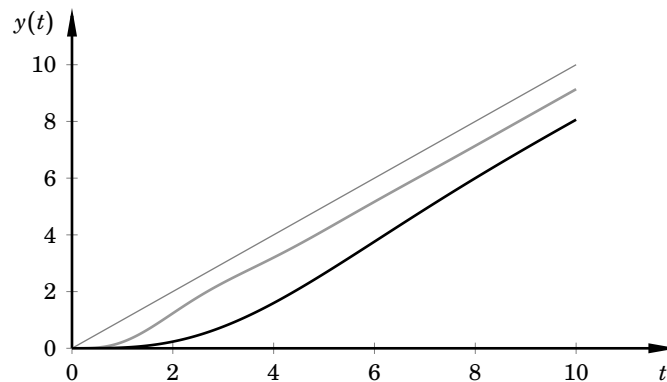
Kompenseringslänkens belopp ges av $|G_k(i\omega_c^*)| = K_K \sqrt{N}$. Numeriska beräkningar ger processens belopp $|G_1(i\omega_c^*)| = 0.183$. Detta ger

$$K_K = \frac{1}{\sqrt{N} \cdot 0.183} = 1.9$$

Stegsvaret för det okompenserade respektive kompenenserade systemet visas i figur S6.11, och rampsvaret visas i figur S6.12. Eftersom $K_K > 1$ blir de stationära felen



Figur S6.11 Stegsvär för slutet okompenserat (heldragen kurva) och kompenenserat system (streckad kurva) i problem 6.14.

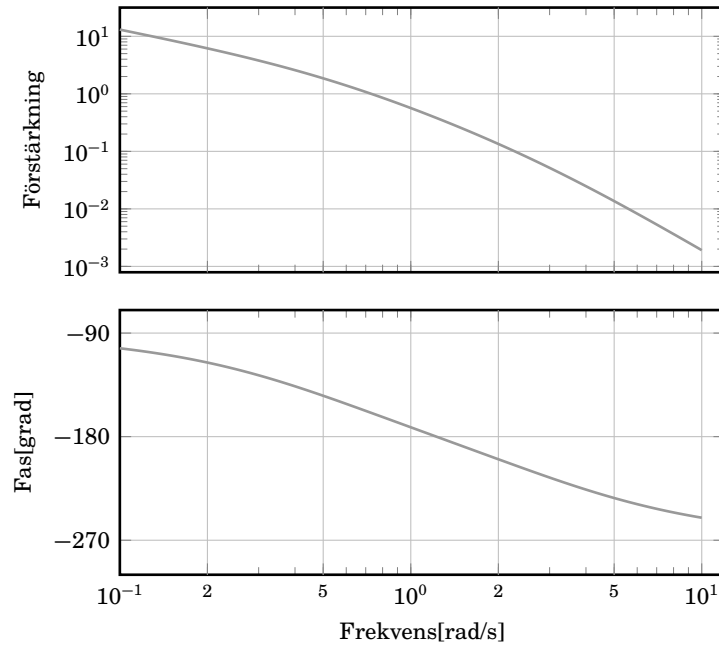


Figur S6.12 Rampsvär för slutet okompenserat system (heldragen kurva) respektive kompenenserat system (streckad kurva) i problem 6.14.

mindre än tidigare, så dessa specifikationer är uppfyllda.

- 6.15** Bodediagrammet för $G_o(s)$ (jfr figur S6.13) ger $\varphi_m = 20^\circ$, $\omega_c = 0.7$ rad/s. Oförändrad snabbhet innebär att skärfrekvensen ej skall ändras av kompenseringen. Vi behöver alltså ett fastillskott på $\Delta\varphi = 30^\circ$ vid $\omega = \omega_c = 0.7$ rad/s. Använd en fasavancerande kompenseringslänk:

$$G_k(s) = KN \frac{s + b}{s + bN}$$



Figur S6.13 Bodediagram för $G_o(s)$ i problem 6.15.

1. Typkurvor i formelsamlingen ger $N = 3$.
2. $b\sqrt{N} = \omega_c \Rightarrow b = \frac{0.7}{\sqrt{3}} = 0.40$
3. $|G_k(i\omega_c)G_o(i\omega_c)| = K\sqrt{N} = 1$ ger $K = \frac{1}{\sqrt{N}} = 0.58$

Kompenseringslänken blir alltså

$$G_k(s) = 0.58 \cdot 3 \frac{s + 0.4}{s + 1.2}$$

Eftersom det slutna systemet är stabilt ges det stationära felet av

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_k G_o} R(s) = \frac{s(s + 0.5)(s + 3)(s + bN)}{s(s + 0.5)(s + 3)(s + bN) + 2KN(s + b)} R(s)$$

Med $R(s) = 1/s^2$ blir det stationära rampfelet

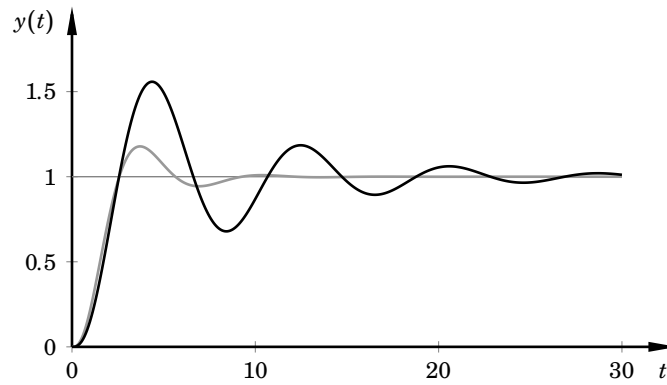
$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1.5}{2K} = 1.3$$

vilket uppfyller specifikationen. Figur S6.14 visar stegsvaret hos systemet före och efter kompensering. Rampfelet visas i figur S6.15. Att rampfelet blir större efter kompensering beror på att $K < 1$.

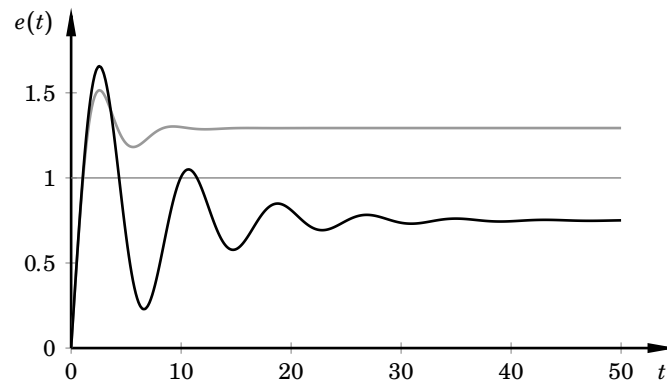
- 6.16** Vi vet att fasretarderande kompensering dimensionerad enligt tumreglerna kommer att minska fasmarginalen med ungefär 6° , vilket ger en viss försämring av robustheten. För att inte få för stor översläng hos det kompenserade systemet börjar vi med att minska förstärkningen hos processen för att på så sätt öka fasmarginalen.

Ur Bodediagrammet för processen (jfr figur S6.16) utläser vi att vid skärfrekvensen $\omega_c = 0.7$ har G_1 en fasvridning på -133° . Vid frekvensen $\omega_c^* = 0.6$ är fasvridningen $-133^\circ + 6^\circ = -127^\circ$ och förstärkningen $|G_1(\omega_c^*)| = 1.2$.

Genom att minska kretsförstärkningen 1.2 gånger får vi alltså en ny skärfrekvens ω_c^* och 6° större fasmarginal. Eftersom vi inte kan påverka förstärkningen i processen direkt, väljer vi att sätta $K = 1/1.2 = 0.83$ i kompensatorn vilket ger samma verkan.



Figur S6.14 Stegsvär hos det slutna okompenserade (svart linje) och kompenserade systemet (grå linje) i problem 6.15.



Figur S6.15 Rampfel hos det slutna okompenserade (svart linje) och kompenserade systemet (grå linje) i problem 6.15.

Huvudproblemet är att minska stationära rampfelet till $e_1 \leq 0.1$. Slutvärdesteoremet ger

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sU(s) \frac{1}{1 + G_k(s)G_1(s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{(s + a/M)s(s^2 + 2s + 2)}{(s + a/M)s(s^2 + 2s + 2) + 1.5KM(s + a)} = \frac{2}{1.5KM} \leq 0.1 \end{aligned}$$

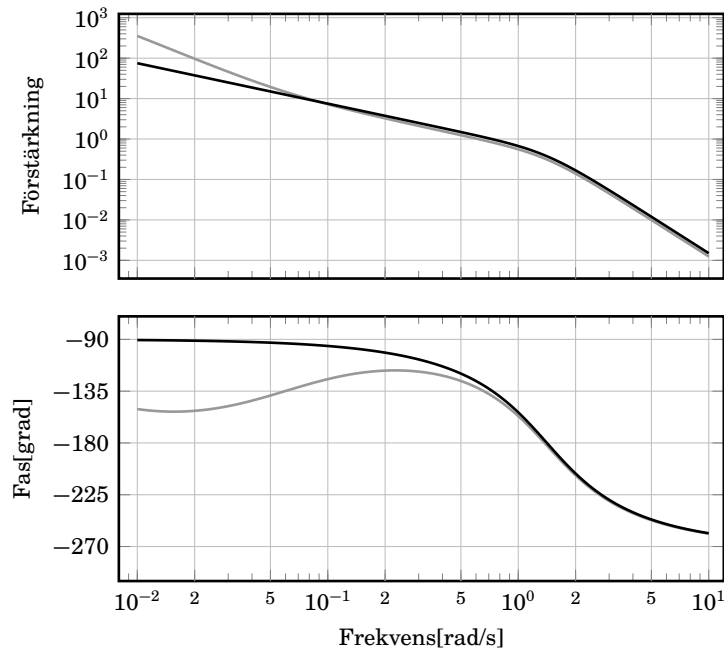
vilket ger $M \geq 16$. Välj $M = 16$. Enligt tumregeln väljer vi $a = 0.1\omega_c^* = 0.06$. Den valda kompenseringen blir alltså

$$G_k(s) = 0.83 \frac{s + 0.06}{s + 0.00375}$$

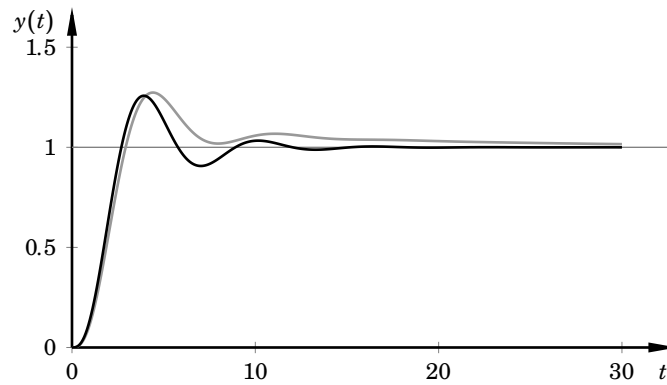
Figur S6.17 visar stegsvaret före och efter kompensering. Rampfelet hos det slutna okompenserade och kompenserade systemet visas i figur S6.18.

Kommentar:

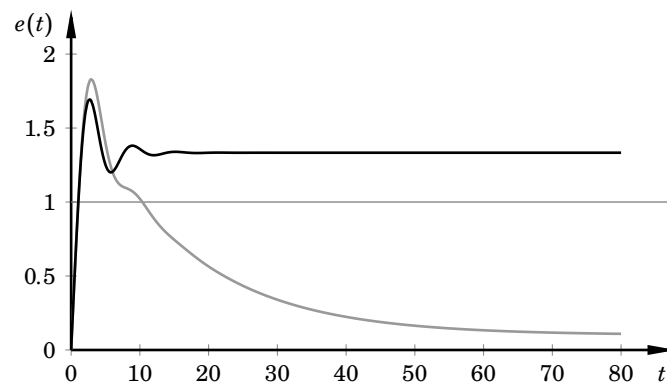
Eftersom vi har minskat kretsförstärkningen får vi en minskad skärfrekvens och därmed ett något långsammare system. I Fig. S6.17 lägger man speciellt märke till den långsamma mod som uppträder vid insvängningen. Denna beror på den långsamma polen i regulatorn i kombination med den låga förstärkningen. Stigtiden och dämpningen är emellertid i stort sett oförändrade. Ett alternativ till att minska kretsförstärkningen för att klara fasmarginen är att införa en fasavancerande kompensering.



Figur S6.16 Bodediagram för det öppna okompenserade systemet (svart linje) och för det öppna kompenserade systemet (grå linje) i problem 6.16.



Figur S6.17 Stegsvär för det slutna okompenserade (svart linje) respektive kompenserade systemet (grå linje) i problem 6.16.



Figur S6.18 Rampfel för det slutna okompenserade (svart linje) och kompenserade (grå linje) systemet i problem 6.16.

Lösningar till övningsexemplen 7

Regulatorstrukturer

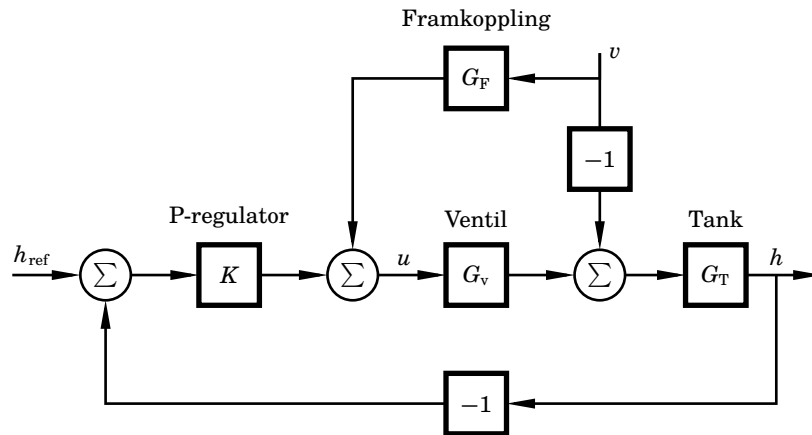
7.1 Störningen d har uppenbarligen ingen inverkan om

$$G_1(s)H(s) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H(s) = -\frac{1}{G_1(s)}$$

För att vara en praktiskt användbar styrlag kräver detta att störningen kan mätas, att modellen $G_1(s)$ av värmepannan och elementet beskriver verkligheten bra, och att den inversa överföringsfunktionen $1/G_1(s)$ är praktiskt realiserbar. Detta innebär att $H(s)$ ej får innehålla någon derivering av signalen d , d.v.s. att täljarpolynomets gradtal inte får vara högre än nämnarpolynomets.

Realiseringen av $H(s)$ kan även vara problematisk om $G_1(s)$ inte är stabilt inverterbar (dvs att inversen är instabil, vilket är samma sak som nollställen i höger halvplan). Vidare kan vi inte invertera processer med lågpaskaraktär mer än vid låga frekvenser, och tidsfördröjningar kan vi ju naturligtvis inte inverta.

7.2 Ett blockschema för systemet visas i figur S7.1. Massbalans för tanken ger



Figur S7.1 Blockschema för nivåreglersystem i problem 7.2.

$$A \frac{dh}{dt} = x(t) - v(t)$$

Laplacetransformation ger ($A = 1 \text{ m}^2$):

$$H(s) = \frac{1}{s}(X(s) - V(s))$$

Tankens överföringsfunktion är alltså

$$G_T(s) = \frac{1}{s}$$

a. Det slutna systemets överföringsfunktion från h_{ref} till h blir

$$G(s) = \frac{G_T G_V K}{1 + G_T G_V K} = \frac{K}{0.5s^2 + s + K}$$

Karakteristiska polynomet blir:

$$s^2 + 2s + 2K$$

Det önskade karakteristiska polynomet är:

$$(s + \omega)^2 = s^2 + 2\omega s + \omega^2$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{cases} \omega = 1 \\ K = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Överföringsfunktionen mellan $v(t)$ och $h(t)$ ges av

$$H(s) = -\frac{G_T}{1 + G_T G_V K} V(s) = -\frac{1 + 0.5s}{s(1 + 0.5s) + K} V(s)$$

Om $v(t)$ är ett steg med storleken 0.1 blir $V(s) = 0.1/s$. Slutvärdesteoremet ger

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = -\frac{0.1}{K}$$

Gränsvärdet existerar och slutvärdesteoremet får användas eftersom nämnarpolynomet i $sH(s)$ är av andra ordningen och har positiva koefficienter.

b. En PI-regulator har överföringsfunktionen

$$G_R(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i})$$

Det slutna systemets överföringsfunktion blir

$$G(s) = \frac{G_T G_V G_R}{1 + G_T G_V G_R} = \frac{K(1 + sT_i)}{s(1 + 0.5s)sT_i + K(1 + sT_i)}$$

Karakteristiska polynomet blir:

$$s^3 + 2s^2 + 2Ks + \frac{2K}{T_i}$$

Det önskade karakteristiska polynomet är:

$$(s + \omega)^3 = s^3 + 3\omega s^2 + 3\omega^2 s + \omega^3$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{cases} \omega = \frac{2}{3} \\ K = \frac{2}{3} \\ T_i = \frac{9}{2} \end{cases}$$

c. Sambandet mellan störflödet v och nivån h ges av

$$H(s) = \frac{G_T(G_V G_F - 1)}{1 + G_T G_V G_R} V(s)$$

För att eliminera inverkan av v skall vi alltså välja

$$G_F(s) = \frac{1}{G_V} = 1 + 0.5s$$

Notera att detta är den ideala framkopplingen, men att den inte går att realisera. Antingen får man stryka derivatatermen eller så får man införa ett lågpassfilter så att högfrekvensförstärkningen begränsas.

7.3 Det slutna systemet har överföringsfunktionen

$$\frac{(G_R + K_f)G_P}{1 + G_P G_R} = \frac{(K + K_f)s + K/T_i}{s^2 + (3 + K)s + K/T_i}$$

a. Det slutna systemets karakteristiska ekvation är

$$s^2 + (3 + K)s + K/T_i = 0$$

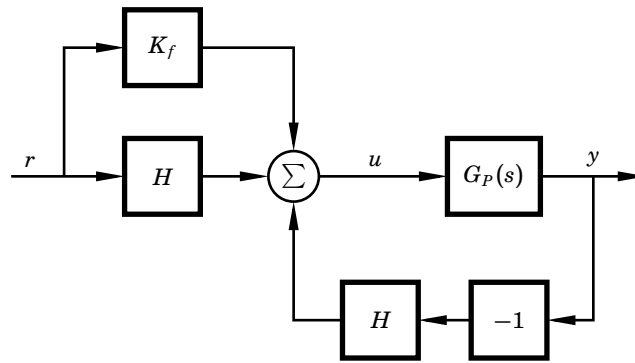
Önskad karakteristisk ekvation:

$$(s + 2 - 2i)(s + 2 + 2i) = s^2 + 4s + 8 = 0$$

Identifiering av koefficienter ger $K = 1$ och $T_i = 1/8$.

b. Framkopplingen K_f påverkar det slutna systemets nollställe men ej dess poler. Man kan placera polerna mha regulatorn G_R så att god reglering av störningar erhålles, jfr uppgift a ovan. Med K_f kan man sedan flytta nollstället så att t.ex. stegsvaret vid börvärdesändringar får önskad översläng. Nollstället hos det slutna systemet elimineras genom att välja $K_f = -K$. Med polplaceringen i uppgift a, som motsvarar en relativ dämpning $\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.7$, får det slutna systemet då en översläng på c:a 5%.

7.4 Blockschemat i uppgift 7.3 kan ritas om enligt figur S7.2. Genom att jämföra med



Figur S7.2 Modifierat blockschema för uppgift 7.3.

blockschemat i uppgift 7.3 ser vi att $H_{ff} = H + K_f$ och $H_{fb} = H$. Observera att genom att manipulera med K_f så har vi möjlighet att neutralisera derivering i H , dvs att åstadkomma en reglering som deriverar på utsignalen, men inte på referensvärdet.

7.5 Systemet har tre insignalerna: Referensvärdet y_r och de två störningarna v_1 och v_2 . Överföringsfunktionerna mellan dessa tre insignalerna och utsignalen y ges av:

$$Y = \frac{G_1 G_2 G_{R1} G_{R2}}{1 + G_1 G_{R1} + G_1 G_2 G_{R1} G_{R2}} Y_r + \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_{R1} + G_1 G_2 G_{R1} G_{R2}} V_1 + \frac{(1 + G_1 G_{R1}) G_2}{1 + G_1 G_{R1} + G_1 G_2 G_{R1} G_{R2}} V_2$$

Låt oss kalla de tre överföringsfunktionerna G_{yr} , G_{v1} respektive G_{v2} . Det bästa vore om $G_{yr} = 1$ och $G_{v1} = G_{v2} = 0$ för alla frekvenser. Det kan vi inte uppnå. Däremot kan vi se till att detta gäller stationärt, d.v.s. när $s = 0$. För en P-regulator gäller att $G_R(0) = K$, där K är regulatorns förstärkning. För en PI-regulator gäller att $G_R(0) = \infty$.

Överföringsfunktionen G_{yr} blir 1 om G_{R2} är en PI-regulator. Överföringsfunktionen G_{v1} blir 0 om någon av regulatorerna är en PI-regulator. Överföringsfunktionen G_{v2} blir däremot 0 endast om G_{R2} är en PI-regulator.

Om vi skall garantera att reglerfelet är 0 stationärt måste alltså regulatorn G_{R2} innehålla en integraldel. Regulatorn G_{R1} kan då väljas som en P-regulator. (Vill vi däremot att den interna signalen y_1 skall överensstämma med sitt börvärde måste även denna regulator ha en integraldel).

7.6 a. Slutna systemets överföringsfunktion ges av

$$G_{\text{inre}}(s) = \frac{K_1 G_1(s)}{1 + K_1 G_1(s)} = \frac{2K_1}{s + 2 + 2K_1}$$

För att systemet skall bli 5ggr så snabbt måste slutna systemets pol hamna i $s = -10$ vilket ger $K_1 = 4$.

b. Approximationen $G_{\text{inre}}(s) \approx G_{\text{inre}}(0) = 0.8$ ger

$$G_{\text{yttre}}(s) = \frac{G_{R2}(s)G_2(s)G_{\text{inre}}(0)}{1 + G_{R2}(s)G_2(s)G_{\text{inre}}(0)} = \frac{(K_2s + \frac{K_2}{T_i})0.8}{s^2 + 0.8K_2s + 0.8\frac{K_2}{T_i}}$$

Det önskade polynomet är

$$(s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

Detta ger $K_2 = 2.5$ och $T_i = 2$.

Kommentar:

En allmän regel vid kaskadreglering är att göra den inre loopen 5–10 ggr så snabb som den yttre för att kunna separera regulatorberäkningarna för de båda looparna. Det egentliga slutna systemet (utan approximation) blir

$$G_{\text{yttre}}(s) = \frac{10(2s + 1)}{s^3 + 10s^2 + 20s + 10}$$

vilket har poler ungefär i -7.516 , -1.702 och -0.7815 där den långsamma polen ($s = -0.7815$) kommer att väsentligen bestämma snabbheten.

7.7 a. Då ångflödet förutsättes konstant kan vi sätta $F = 0$, varvid domen beskrives av

$$Y(s) = \frac{10^{-3}}{s} M(s)$$

Eftersom regulatorn är av P-typ så är $M(s) = K(Y_r - Y)$, där Y_r betecknar domnivåns referensvärde. Detta ger

$$Y(s) = \frac{K}{K + 10^3 s} Y_r(s)$$

Eftersom systemet är linjärt och vi har återkoppling med -1, så ger en stegstörning i nivån upphov till samma transienta förlopp i nivån som en stegstörning i referensvärdet. Sätt därför $Y_r(s) = \frac{1}{s}$. Inverstransformering av $Y(s)$ ger

$$y(t) = 1 - e^{-K10^{-3}t}$$

Specifikationen på systemets lösningstid ger nu

$$y(10) = 1 - e^{-K10^{-2}} = 0.9 \quad \Rightarrow \quad K = 230$$

- b. Domen med P-regulator beskrivs av

$$Y(s) = \frac{K}{K + 1000s} Y_r(s) + \frac{s - 0.01}{(s + 0.1)(1000s + K)} F(s)$$

Sätt $Y_r(s) = 0$. En stegstörning i ångflödet, $F(s) = \frac{1}{s}$, ger då

$$Y(s) = \frac{s - 0.01}{(s + 0.1)(1000s + K)} \frac{1}{s}$$

Slutvärdesteoremet ger

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s - 0.01}{(s + 0.1)(1000s + K)} \frac{1}{s} = \frac{-0.1}{K}$$

Det stationära felet blir då

$$e = y_r - y = -y = \frac{0.1}{K}$$

- c. Bestäm för det ursprungliga systemet en framkoppling $H(s)$ från ångflöde $F(s)$ till matarvatten $M(s)$, så att nivån Y blir oberoende av ändringar i ångflödet.

Systemet med framkopplingen $H(s)F(s)$ beskrivs av

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{10^{-3}}{s} (M(s) + H(s)F(s)) + \frac{s - 0.01}{s(s + 0.1)} 10^{-3} F(s) \\ &= \frac{10^{-3}}{s} M(s) + \frac{10^{-3}}{s} \left(\frac{s - 0.01}{s + 0.01} + H(s) \right) F(s) \end{aligned}$$

Vi vill att verkan från $F(s)$ skall vara noll. Välj därför $H(s)$ så att uttrycket framför $F(s)$ blir noll. Detta villkor är uppfyllt då

$$H(s) = -\frac{s - 0.01}{s + 0.1}$$

vilket ger den sökta framkopplingen.

7.8 Dödtidsmarginalen ges av

$$L_m = \frac{\varphi_m}{\omega_c}$$

Beräkna först skärfrekvensen ω_c :

$$|G_0(i\omega_c)| = |G_P(i\omega_c)G_R(i\omega_c)| = \left| \frac{2}{i\omega_c(i\omega_c + 1)} \right| = \frac{2}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 1}} \equiv 1$$

$$\Leftrightarrow \omega_c^4 + \omega_c^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_c = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}} = 1.25$$

Beräkna sedan fasmarginalen φ_m :

$$\varphi_m = \pi + \arg G_0(i\omega_c) = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan \omega_c = 0.675$$

Vi får $L_m = \varphi_m / \omega_c = 0.54$.

7.9 a. Dödtiden på en sekund (e^{-s}) betraktas som en del av processen.

Regulator: $G_R(s) = K$

Process: $G_P(s) = \frac{1}{s(s + 1)} e^{-s}$

Modell: $\hat{G}_P(s) = G_P(s) = \frac{1}{s(s + 1)} e^{-s}$

Modell utan dödtid: $\hat{G}_P^0(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$

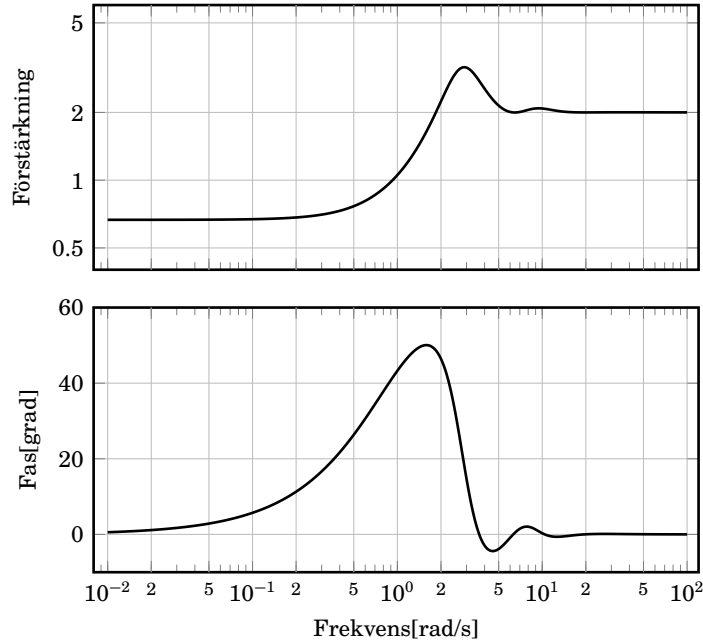
b. Enligt blockschemat ges styrsignalen av

$$U(s) = G_R(s) \left(E(s) + \hat{G}_P(s)U(s) - \hat{G}_P^0(s)U(s) \right)$$

Regulatorns överföringsfunktion ges av

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{G_R(s)}{1 - G_R(s)\hat{G}_P(s) + G_R(s)\hat{G}_P^0(s)} E(s) \\ &= \frac{2}{1 - \frac{2}{s(s+1)}e^{-s} + \frac{2}{s(s+1)}} E(s) = \frac{2s(s+1)}{s(s+1) + 2 - 2e^{-s}} E(s) \end{aligned}$$

Bodediagrammet för regulatorn är ritat i figur S7.3. Man kan notera att Otto Smith-regulatorn ger ett stort faslyft vid det ursprungliga systemets skärfrekvens.



Figur S7.3 Otto Smith-regulatorns Bodediagram.

c.

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{2s(s+1)}{s(s+1) + 2 - 2e^{-s}} E(s) \approx \frac{2s(s+1)}{s(s+1) + 2 - 2(1-s)} E(s) \\ &= \frac{2(s+1)}{s+3} E(s) \end{aligned}$$

Detta är en fasavancerande kompenseringslänk med $N = 3$.

7.10 Systemets amplitudkurva ges av

$$|G(i\omega)| = \frac{k}{\omega}$$

Det räcker att läsa av amplitudkurvan vid en enda punkt för att bestämma k . T.ex. så är amplituden 1 vid ca $\omega = 4.5$. Detta ger

$$1 = \frac{k}{4.5} \quad \Leftrightarrow \quad k = 4.5$$

Systemets faskurva ges av

$$\arg G(i\omega) = -\pi/2 - \omega L$$

Det räcker att läsa av faskurvan vid en enda punkt för att bestämma L . T.ex. så är fasen $-\pi$ vid ca $\omega = 120$. Detta ger

$$-\pi = -\pi/2 - 120L \quad \Leftrightarrow \quad L = 0.013$$

Lösningar till övningsexemplen 8

Några designexempel

- 8.1 a. Faskurvan för $v = 3$ knop skär -180° vid $\omega_{-180^\circ} \approx 0.03$ rad/s. Vid denna frekvens är absolutbeloppet $|G(i0.03)| \approx 2$. Förstärkningen K måste följaktligen vara mindre än 0.5 för att det slutna systemet skall vara stabilt.

- b. För att skärfrekvensen skall vara ω_c med fasmarginal φ_m så måste

$$\begin{aligned} |G_r(i\omega_c)G(i\omega_c)| &= 1 \\ \arg G_r(i\omega_c)G(i\omega_c) &= \varphi_m - 180^\circ \end{aligned}$$

där $G_r(s) = K(1 + T_D s)$. Detta leder till ekvationerna

$$\begin{aligned} K|G(i\omega_c)|\sqrt{1 + T_D^2\omega_c^2} &= 1 \\ \arg G(i\omega_c) + \arctan T_D\omega_c &= \varphi_m - 180^\circ \end{aligned}$$

Med $\omega_c = 0.03$ rad/s, $\varphi_m = 60^\circ$, $|G(i\omega_c)| \approx 2$ och $\arg G(i\omega_c) \approx -180^\circ$ så får vi

$$\begin{aligned} T_d &= \frac{\tan 60^\circ}{0.03} = \frac{\sqrt{3}}{0.03} \approx 57.7 \\ K &= \frac{1}{|G(i\omega_c)|\sqrt{1 + T_d^2\omega_c^2}} \approx \frac{1}{2 \cdot 2} = 0.25 \end{aligned}$$

- c. Om hastigheten plötsligt ökar från 3 till 7 knop så gäller de gråa Bodekurvorna i Fig. 8.2. Den mest dramatiska förändringen är att amplitudkurvan har höjts med en faktor 20. Dessutom har faskurvan sänkts för frekvenser över 0.03 rad/s. Detta resulterar i att både fas- och amplitudmarginal reduceras kraftigt. En noggrannare undersökning visar att det slutna systemet i själva verket blir instabilt. Detta kan utläsas ur Bodediagrammet i Fig. 8.2, som dels visar det nominella fallet $v = 3$ knop, dels fallet $v = 7$ knop. Ett sätt att undvika detta problem är att istället välja $v = 7$ knop som nominellt fall för beräkningen av PD-regulatorn. Detta innebär dock att man måste acceptera ett långsammare insvängningsförlopp för den lägsta hastigheten $v = 3$ knop. Ett bättre sätt är att låta K och T_d bero av hastigheten v . Denna metod brukar kallas för parameterstyrning ("gain scheduling").

- d. Den approximativa överföringsfunktionen från β till h kan skrivas

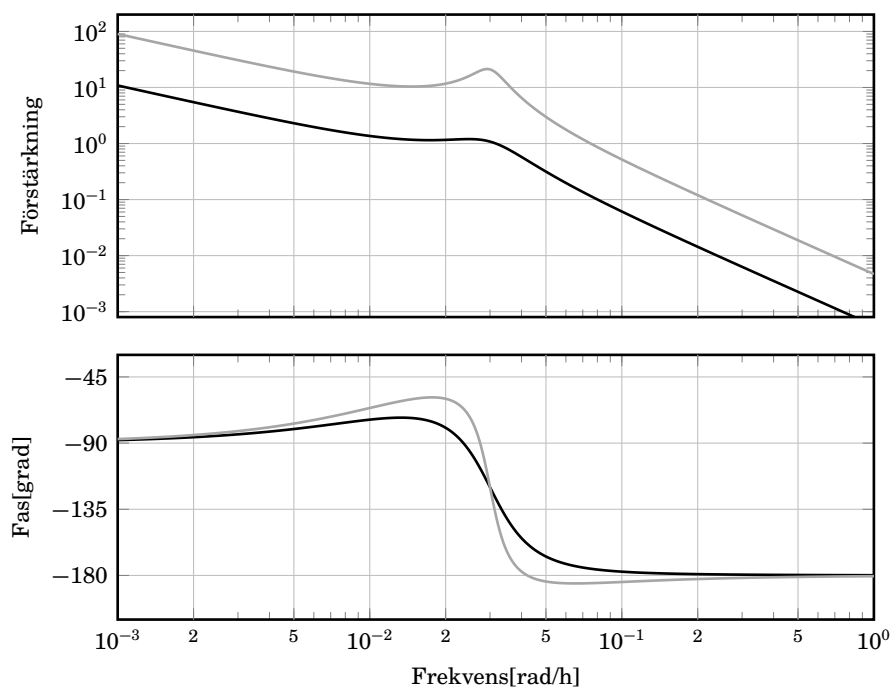
$$G_{h\beta}(s) = \frac{k_v v}{s^3}$$

Ur Bodediagrammet kan man för $v = 3$ knop $= 3 \cdot 1.852/3.6 \approx 0.5144 \cdot 3$ m/s avläsa att $|G_{h\beta}(i \cdot 0.1)| \approx 0.04$ vilket ger att

$$k_v \approx \frac{0.1^3 \cdot 0.04}{3 \cdot 0.5144} \approx 2.6 \cdot 10^{-5}$$

- e. Slutna systemets karaktäristiska ekvation ges av

$$s^3 + Kk_v v = 0$$



Figur S8.1 Bodediagram för den PD-komenserade öppna loopen i uppgift 8.1. De svarta kurvorna svarar mot hastigheten $v = 3$ knop (nominella fallet) medan de gråa kurvorna visar fallet $v = 7$ knop. Notera att det senare fallet ger ett instabilt slutet system.

Eftersom alla koefficienter inte är positiva är systemet inte stabilt för något val av K . I uppgift (a) konstaterades via det uppmätta frekvenssvaret att det återkopplade systemet var stabilt för $K < 0.5$. Förklaringen fås ur samma Bodediagram som användes i (a): Approximationen gäller bara för höga frekvenser ($\omega > 0.05$) och vid så låga förstärkningar som $K < 0.5$ är skärningsfrekvensen $\omega_c < 0.03$ dvs utanför modellens giltighetsområde. För $\omega < 0.03$ visar t.ex. Bodediagrammet en fas som är ovanför -180° medan den förenklade modellen ju har fassen -270° för alla frekvenser.

f. Om $x = (\dot{\alpha}, \alpha, h)^T$ och $u = \beta$ så blir tillståndsekvationerna

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} k_v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Med tillståndsåterkopplingen $u = -L_r x + u_r$ blir slutna systemets karakteristiska polynom

$$p(s) = \det(sI - A + BL) = s^3 + k_v l_1 s^2 + k_v l_2 s + k_v v l_3$$

Det önskade karakteristiska polynomet är

$$p(s) = (s + \gamma\omega_0)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2) = s^3 + (\gamma + 2\zeta)\omega_0 s^2 + (2\gamma\zeta + 1)\omega_0^2 s + \gamma\omega_0^3$$

Direkt jämförelse ger att

$$\begin{cases} l_1 = \frac{(\gamma + 2\zeta)\omega_0}{k_v} \\ l_2 = \frac{(2\gamma\zeta + 1)\omega_0^2}{k_v} \\ l_3 = \frac{\gamma\omega_0^3}{k_v v} \end{cases}$$

g. Stationäritet innebär i detta fall att höjden är konstant, $h = h_{\text{ref}}$. Detta betyder i sin tur att alla derivator av h måste vara noll dvs $\alpha = 0$ och $\dot{\alpha} = 0$. När höjden

nått sitt rätta värde måste också styrsignalen $u = \beta$ vara noll eftersom ubåten annars skulle ha fortsatt att stiga. Man erhåller därför L_r ur ekvationen

$$0 = L_r h_{\text{ref}} - l_1 \cdot 0 - l_2 \cdot 0 - l_3 h_{\text{ref}}$$

Härav får man då $v = 3$ knop att

$$L_r = l_3 = \frac{\gamma \omega_0^3}{k_v v} \approx \frac{\gamma \omega_0^3}{2.6 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 0.5144} \approx \frac{\gamma \omega_0^3}{4.0 \cdot 10^{-5}}$$

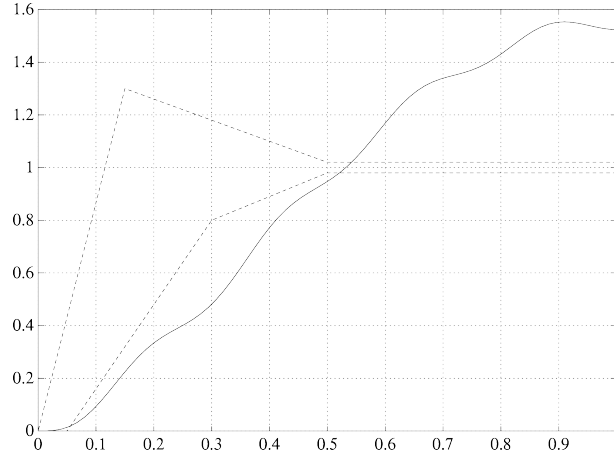
h. Vid en momentan störning med $\Delta h = 0.1$ m blir roderutslaget

$$\Delta \beta = l_3 \cdot \Delta h = \frac{\gamma \omega_0^3}{v k_v} \cdot 0.1 \approx \frac{0.2 \omega_0^3}{3 \cdot 0.5144 \cdot 2.6 \cdot 10^{-5}}$$

Eftersom $\Delta \beta \leq 5^\circ$ så måste vi

$$\omega_0 \leq \left(\frac{5 \cdot 3 \cdot 0.5144 \cdot 2.6 \cdot 10^{-5}}{0.2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.1$$

8.2 a. Ur Bode-diagrammet avläser man oscillationsfrekvensen $\omega_o \approx 27$ rad/s och kritiska förstärkningen $K_c \approx 3.6$. Oscillationsperioden blir då $T_o = 2\pi/\omega_o \approx 0.23$. Detta ger PID-parametrarna $K = 0.6K_c \approx 2.2$, $T_i = T_o/2 \approx 0.12$ och $T_d = T_o/8 \approx 0.03$. Stegsvaret för det slutna systemet visas i Fig. S8.2. Specifikationerna är helt



Figur S8.2 Stegsvaret med PID-reglering enligt Ziegler-Nichols.

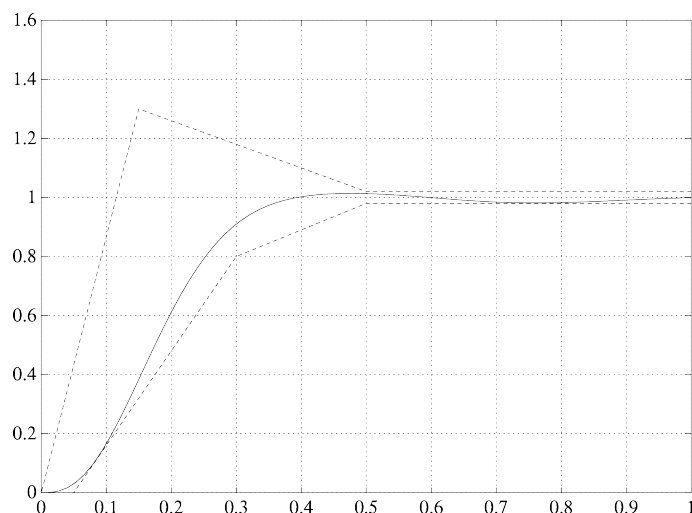
klart inte uppfyllda. En PID-regulator (med filterfaktor) kan betraktas som en andra ordningens regulator med integration. Med en mera generell andra ordningens regulator med integration kan man i själva verket uppfylla specifikationen (Fig. S8.3). Försöker man översätta denna regulator till motsvarande PID-parametrar så får man i just det här fallet en negativ derivatid T_d .

b. Stationärt måste alla derivator av tillstånden vara noll $\dot{x} = 0$. Det gäller därför att

$$\begin{cases} 0 = Ax^o + Bu^o = (A - BL)x^o + BL_r y_r \\ y_r = y^o = Cx^o \end{cases}$$

Detta ger att

$$L_r = -\frac{1}{C(A - BL)^{-1}B}$$



Figur S8.3 Stegsvaret för slutna systemet med en andra ordningens regulator med integration.

c. Med x utvidgad till $x_e = (x_1, x_2, x_3, x_i)^T$ så får man

$$\dot{x}_e = \begin{pmatrix} -\frac{d_1 + d_f}{J_1} & \frac{d_f}{J_1} & -\frac{k_f}{J_1} & 0 \\ \frac{d_f}{J_2} & -\frac{d_f + d_2}{J_2} & \frac{k_f}{J_2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\omega_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} x_e + \begin{pmatrix} \frac{k_m k_i}{J_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} y_r$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & k_{\omega_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} x_e$$

där referenssignalen y_r har införts som en extra insignal.

d. Ungefärligt värde på ω_m blir

$$\omega_m \approx -\frac{\ln 0.02}{0.5 \cdot 0.38} \approx 20$$

e. När det gäller laststörningen så är det snabba Kalmanfiltret ($\omega_o = 40$) bäst. Det är även bäst när det gäller att dämpa brusets inverkan på utsignalen. Däremot är det sämst då det gäller att undertrycka brusets inverkan på styrsignalen. För $\omega_o = 10$ och $\omega_o = 20$ är bruskänsligheten ungefär densamma medan $\omega_o = 10$ ger en långsammare eliminering av laststörningen. Ett lämpligt val är $\omega_o = 20$.

Lösningar till övningsexemplen 9

Interaktiv jämförelse mellan modellbeskrivningar

9.1

- a. Stegsvarets amplitud påverkas, men inte tidskonstanten. Polen påverkas inte. Nyquistdiagrammet behåller sin form, men varje punkt på kurvan rör sig radiellt från origo. I Bodediagrammet ändras amplitudkurvan i y-led, medan faskurvan är oförändrad.

Eftersom styrsignalen är ett enhetssteg ges K av stationära värdet på mätsignalen i stegsvaret. I Nyquistdiagrammet kan K avläsas vid startpunkten på positiva reella axeln och i Bodediagrammet kan K avläsas i förstärkningskurvan då $\omega \rightarrow 0$.

- b. Stegsvarets amplitud påverkas inte, men tidskonstanten ges av T . Polen är $s = -1/T$, vilket innebär att en stor tidskonstant ger en pol nära origo, medan en kort tidskonstant ger en pol långt bort från origo. I Bodediagrammet är brytfrekvensen $1/T$, och den varierar därför när T varierar. Nyquistdiagrammets utseende påverkas inte av T , men frekvensen varierar utmed kurvan.

Antag att vi har två processer med olika värden på T . Då kan vi alltid hitta två frekvenser så att

$$G(i\omega_1 T_1) = \frac{K}{1 + i\omega_1 T_1} = G(i\omega_2 T_2) = \frac{K}{1 + i\omega_2 T_2}$$

det vill säga alla punkter som finns på den ena Nyquistkurvan finns också på den andra, fast vid en annan frekvens.

- c. En variation i L motsvarar en translation av stegsvaret. Vi kan inte representera dödtiden i singularitetsdiagrammet. Bodediagrammets amplitudkurva påverkas inte, eftersom $|e^{-i\omega L}| = 1$, men fasen minskar. Varje frekvenspunkt i Nyquistdiagrammet får oförändrat avstånd från origo, men fasen minskar. Eftersom fasen går mot $-\infty$ då $\omega \rightarrow \infty$ blir Nyquistkurvan spiralformad.

9.2

- a. Förändringarna är desamma som i uppgift 1a.
- b. Förändringarna är analoga med dem i uppgift 1b. Då $T_1 \gg T_2$ får man ett stegsvar som liknar det i uppgift 1a med $T \approx T_1$. Även Bodediagrammet och Nyquistdiagrammet liknar dem i uppgift 1a vid låga frekvenser. Man kan därför i många sammanhang approximera överföringsfunktionen med

$$G(s) = \frac{K}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \approx \frac{K}{(1 + sT_1)}$$

- c. Om nollstället ligger långt från origo påverkas inte representationerna nämnvärt. Om nollstället är negativt och ligger nära origo får man en stor översläng i stegsvaret. Om nollstället är positivt och ligger nära origo kommer stegsvaret att först gå i fel riktning. Om nollstället är positivt kommer det att ge ett negativt tillskott till fasen.

Då $T_3 < 0$, d.v.s. då nollstället ligger i högra halvplanet, är processen svår att reglera. Man kan förstå att det är svårt för en regulator att agera på rätt sätt när

en styrsignaländring gör att mätsignalen initialt går i motsatt riktning mot den önskade. Fenomenet kan man förstå genom att skriva överföringsfunktionen på följande sätt

$$G(s) = \frac{K(1 + sT_3)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = \frac{K}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} + \frac{sKT_3}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

Överföringsfunktionen består alltså av två termer, en som är den överföringsfunktionen vi hade i uppgift 2a och en som är samma överföringsfunktion multiplicerad med sT_3 . Den andra termen är alltså proportionell mot derivatan av mätsignalen vi fått om vi inte haft något nollställe. Om $T_3 < 0$ kommer denna term att ge ett negativt bidrag, vilket förklarar att stegsvaret initialt går åt fel håll.

9.3

- a. Frekvensen ω påverkar snabbheten hos systemet, men inte stegsvarets form. Variationer i ω flyttar polerna radiellt från origo. I Bodediagrammet påverkar ω inte formen, men brytfrekvensens läge. Nyquistdiagrammet påverkas ej till formen, men frekvenserna flyttas utmed kurvan.
- b. Den relativa dämpningen ζ påverkar inte snabbheten hos stegsvaret, men formen. Ett litet värde på ζ ger ett svängande och dåligt dämpat stegsvar. Ett litet värde på ζ ger en stor resonanstopp i Bodediagrammet och i Nyquistdiagrammet får man en stor förstärkningsökning och en snabb fasvridning runt ω .