

REGLERTEKNIK

Formelsamling

Institutionen för reglerteknik

Lunds tekniska högskola

September 2021

Matristeori

Beteckningar

Matris av ordning $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vektor med dimension n

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Transponering

$$B = A^T$$

$$b_{ij} = a_{ji}$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Om $a_{ij} = a_{ji}$ är matrisen symmetrisk.

Determinant

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Om A är av ordningen 2×2 gäller

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Allmänt gäller

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det M_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det M_{ij} \end{aligned}$$

där M_{ij} är den matris, som erhålles om rad i och kolumn j i matrisen A strykes.

Invers

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad (\det A \neq 0)$$

Om A är av ordning 2×2 gäller

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Allmänt gäller

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

där elementen i C ges av

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

Eigenvärden och egenvektorer

Eigenvärdena ($\lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$) och egenvektorerna ($x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$) fås som lösningar till ekvationssystemet

$$Ax = \lambda x$$

som har lösning om

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0$$

$\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n$ kallas *karakteristiskt polynom*. $\det(\lambda I - A) = 0$ kallas *karakteristisk ekvation*.

Dynamiska system

Tillståndsekvationer

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Viktfunktion

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

Överföringsfunktion

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

G :s nämnare är karakteristiska polynomet till matrisen A .

Frekvenssvar

$$u(t) = \sin \omega t$$

$$y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = |G(i\omega)|$$

$$\varphi = \arg G(i\omega)$$

Linjärisering

Om det olinjära systemet

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

$$y = g(x, u)$$

linjäriseras kring en stationär punkt (x_0, u_0) fås efter variabelbytet

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta u = u - u_0$$

$$\Delta y = y - y_0$$

det linjära systemet

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)\Delta u$$

$$\Delta y = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, u_0)\Delta x + \frac{\partial g}{\partial u}(x_0, u_0)\Delta u$$

Tillståndsbeskrivningar

1. Diagonalformen

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix} z + Du$$

2. Observerbara kanoniska formen

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} z + Du$$

3. Styrbara kanoniska formen

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} z + Du$$

Systemets överföringsfunktion är

$$G(s) = D + \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$
$$= D + \frac{\beta_1 \gamma_1}{s - \lambda_1} + \frac{\beta_2 \gamma_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{\beta_n \gamma_n}{s - \lambda_n}$$

Laplacetransformen

Operationslexikon

	Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
1	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	Linjäritet
2	$F(s + a)$	$e^{-at} f(t)$	Dämpning
3	$e^{-as} F(s)$	$\begin{cases} f(t - a) & t - a > 0 \\ 0 & t - a < 0 \end{cases}$	Tidsfördröjning
4	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$	$f(at)$	Skalning i t -planet
5	$F(as) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$	Skalning i s -planet
6	$F_1(s)F_2(s)$	$\int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau) d\tau$	Faltning i t -planet
7	$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_1(\sigma)F_2(s - \sigma) d\sigma$	$f_1(t)f_2(t)$	Faltning i s -planet
8	$sF(s) - f(0)$	$f'(t)$	Derivering i t -planet
9	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	$f''(t)$	
10	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	$f^{(n)}(t)$	
11	$\frac{d^n F(s)}{ds^n}$	$(-t)^n f(t)$	Derivering i s -planet
12	$\frac{1}{s} F(s)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	Integration i t -planet
13	$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$	$\frac{f(t)}{t}$	Integration i s -planet
14	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	Slutvärdesteoremet
15	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	Begynnelsevärdesteoremet

Transformlexikon

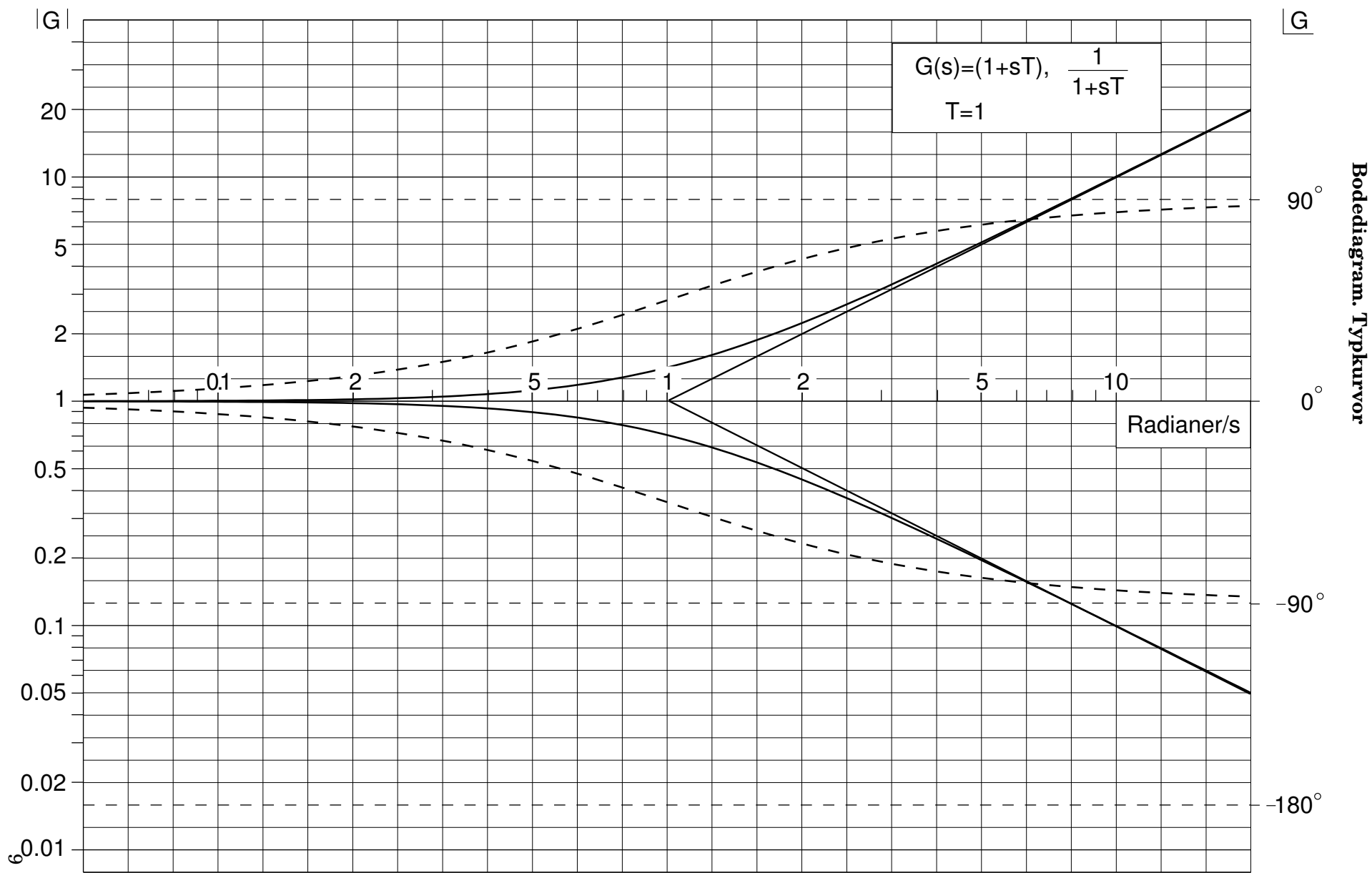
	Laplace transform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
1	1	$\delta(t)$	Diracfunktion
2	$\frac{1}{s}$	1	Stegfunktion
3	$\frac{1}{s^2}$	t	Rampfunktion
4	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} t^2$	Acceleration
5	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	
6	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	
7	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t \cdot e^{-at}$	
8	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	
9	$\frac{1}{1+sT}$	$\frac{1}{T} e^{-t/T}$	
10	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$	
11	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	
12	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$	
13	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	
14	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	
15	$\frac{1}{s(1+sT)}$	$1 - e^{-t/T}$	
16	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b}$	

Transformlexikon, fortsättning

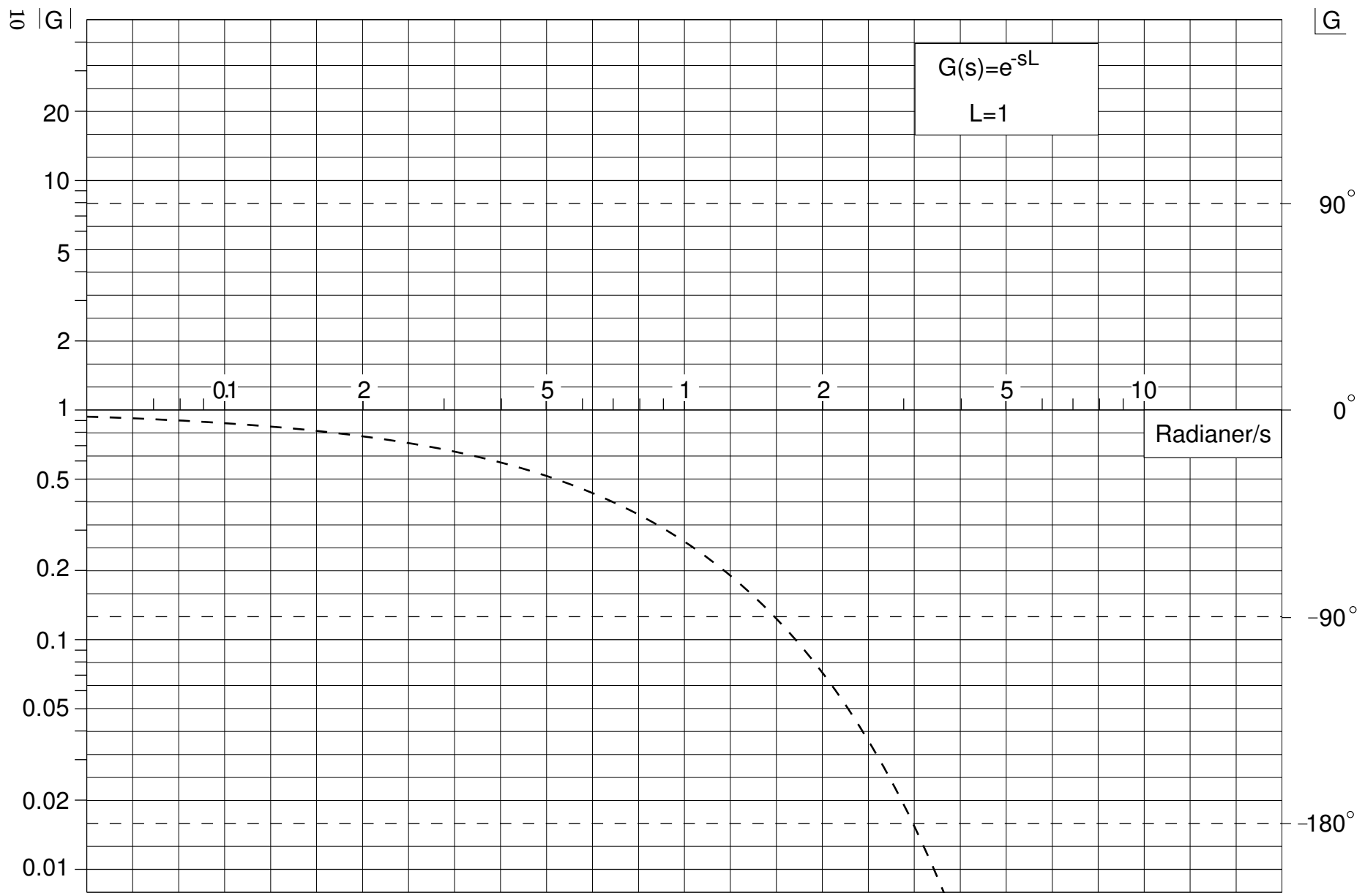
	Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$
17	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}$
18	$\frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$	$e^{-bt} \sin at$
19	$\frac{s+b}{(s+b)^2 + a^2}$	$e^{-bt} \cos at$
20	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\zeta = 0$ $\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$ $\zeta < 1$ $\frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t)$ $\zeta = 1$ $te^{-\omega_0 t}$ $\zeta > 1$ $\frac{1}{\omega_0 \sqrt{\zeta^2-1}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sinh(\omega_0 \sqrt{\zeta^2-1} t)$
21	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	
	$0 \leq \tau \leq \pi :$	$\zeta < 1$ $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + \tau)$ $\tau = \arctan \frac{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta\omega_0}$
		$\zeta = 0$ $\cos \omega_0 t$
		$\zeta = 1$ $(1 - \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$
22	$\frac{a}{(s^2 + a^2)(s+b)}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\sin(at - \phi) + e^{-bt} \sin \phi)$ $\phi = \arctan \frac{a}{b}$

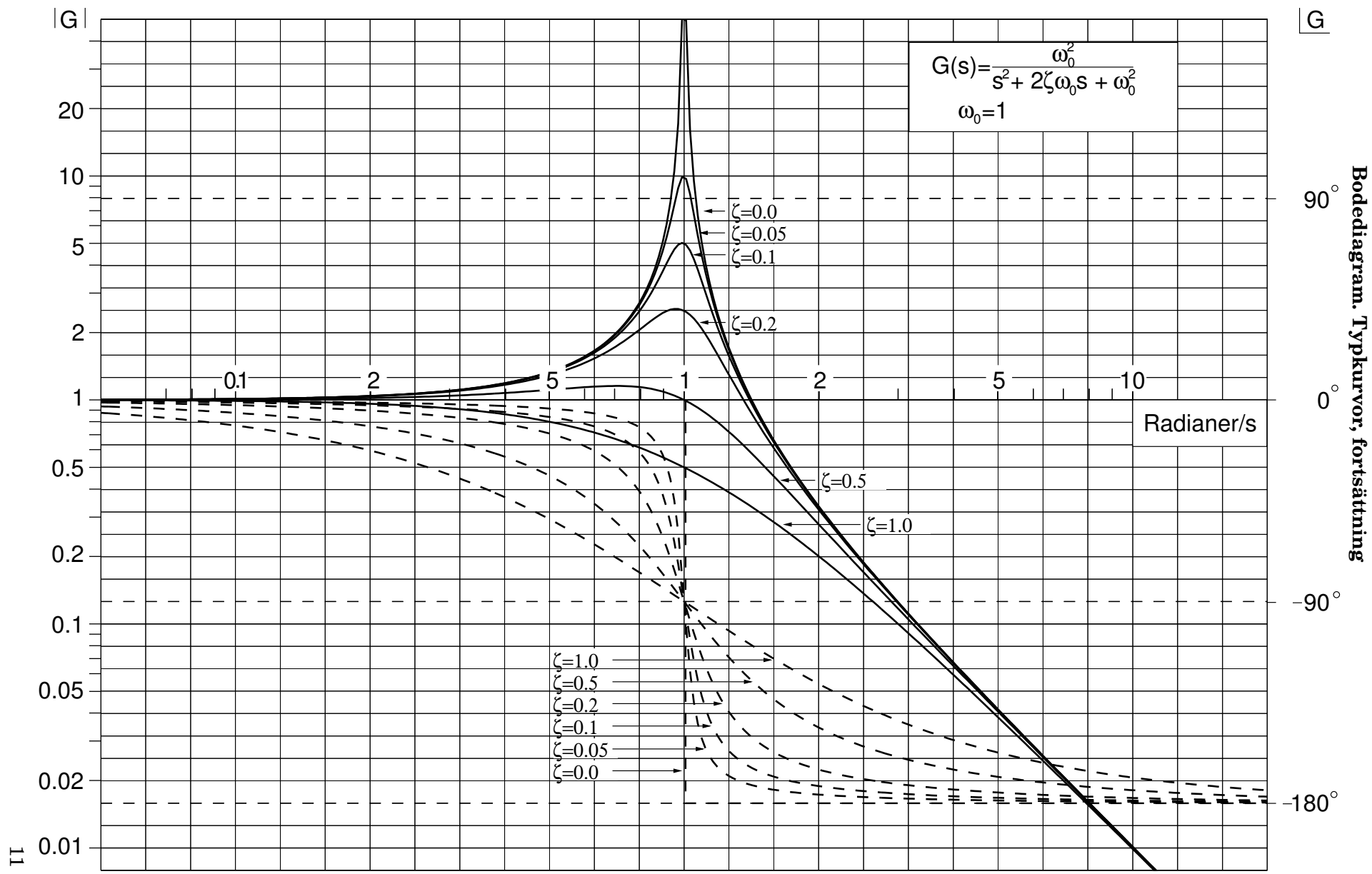
Laplacetransformtabell, fortsättning

	Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$
23	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s + b)}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\cos(at - \phi) - e^{-bt} \cos \phi)$ $\phi = \arctan \frac{a}{b}$
24	$\frac{ab}{s(s + a)(s + b)}$	$1 + \frac{ae^{-bt} - be^{-at}}{b - a}$
25	$\frac{a^2}{s(s + a)^2}$	$1 - (1 + at)e^{-at}$
26	$\frac{a}{s^2(s + a)}$	$t - \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$
27	$\frac{1}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{(b - c)e^{-at} + (c - a)e^{-bt} + (a - b)e^{-ct}}{(b - a)(c - a)(b - c)}$
28	$\frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2)}$	$0 < \zeta < 1$ $1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0t} \sin(\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}t + \phi)$ $\phi = \arccos \zeta$ $\zeta = 0$ $1 - \cos \omega_0t$
29	$\frac{1}{(s + a)^{n+1}}$	$\frac{1}{n!} t^n e^{-at}$
30	$\frac{s}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{a(b - c)e^{-at} + b(c - a)e^{-bt} + c(a - b)e^{-ct}}{(b - a)(b - c)(a - c)}$
31	$\frac{as}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2} \sin at$
32	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
33	$\frac{1}{\sqrt{s}} F(\sqrt{s})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\sigma^2/4t} f(\sigma) d\sigma$



Bodediagram. Typkurvor, fortsättning





Stabilitet

Villkor för asymptotisk stabilitet för lägre ordningens polynom

$$\begin{array}{ll} s + a_1 & a_1 > 0 \\ s^2 + a_1s + a_2 & a_1 > 0, \quad a_2 > 0 \\ s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 & a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 > a_3 \end{array}$$

Rouths algoritm

Betrakta polynomet

$$F(s) = a_0s^n + b_0s^{n-1} + a_1s^{n-2} + b_1s^{n-3} + \dots$$

Antag att koefficienterna a_i, b_i är reella och att a_0 är positiv. Inför tablån

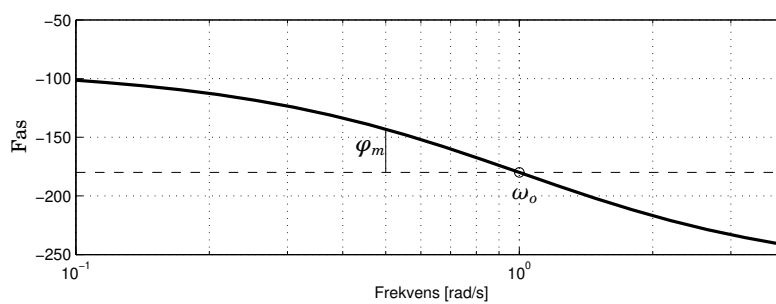
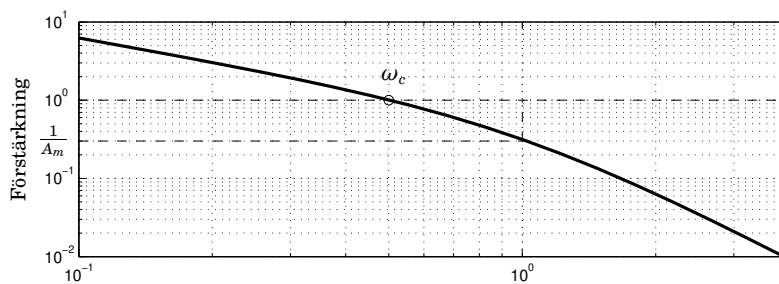
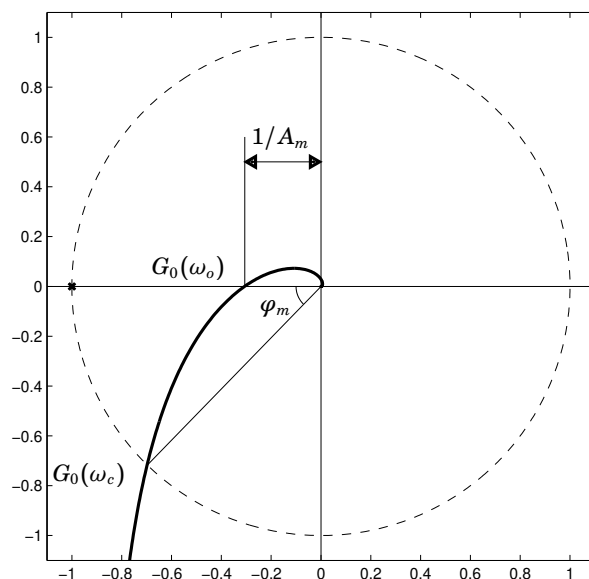
$$\begin{array}{lll} a_0 & a_1 & a_2 \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 \dots \\ c_0 & c_1 & c_2 \dots \\ d_0 & d_1 & d_2 \dots \\ \vdots & & \end{array}$$

där

$$\begin{array}{l} c_0 = a_1 - a_0b_1/b_0 \\ c_1 = a_2 - a_0b_2/b_0 \\ \vdots \\ d_0 = b_1 - b_0c_1/c_0 \\ d_1 = b_2 - b_0c_2/c_0 \\ \vdots \end{array}$$

Antalet teckenväxlingar hos sviten $a_0, b_0, c_0, d_0 \dots$ är lika med det antal rötter som polynomet $F(s)$ har i högra halvplanet $\text{Re } s > 0$. Alla rötter till polynomet $F(s)$ ligger i vänstra halvplanet om samtliga tal $a_0, b_0, c_0, d_0, \dots$ är positiva.

Stabilitetsmarginaler



Amplitudmarginal:

$$A_m = 1/|G_0(i\omega_o)|$$

Fasmarginal:

$$\varphi_m = \pi + \arg G_0(i\omega_c)$$

Dödtidsmarginal:

$$L_m = \varphi_m/\omega_c$$

Tillståndsåterkoppling och Kalmanfiltrering

Tillståndsåterkoppling

Om systemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

återkopplas med styrlagen

$$u = -Kx + k_r r$$

ges det slutna systemet av

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (A - BK)x + Bk_r r \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Kriterium på styrbarhet. De styrbara tillstånden ligger i det linjära underrum av tillståndsrummet som spänns upp av kolonnerna i matrisen

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

Ett system är styrbart om och endast om matrisen W_s har n linjärt oberoende kolonner.

Kalmanfiltrering

Antag att endast utsignalen y kan mätas direkt. Inför modellen

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

Rekonstruktionsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$ satisfierar då

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (A - LC)\tilde{x}$$

Kriterium på observerbarhet. De tysta tillstånden ligger i nollrummet till matrisen

$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ett system är observerbart om och endast om matrisen W_o har n linjärt oberoende rader.

Kompensering i frekvensplanet

Fasretarderande länk

$$G_K(s) = \frac{s + a}{s + a/M} = M \frac{1 + s/a}{1 + sM/a} \quad M > 1$$

Tumregeln

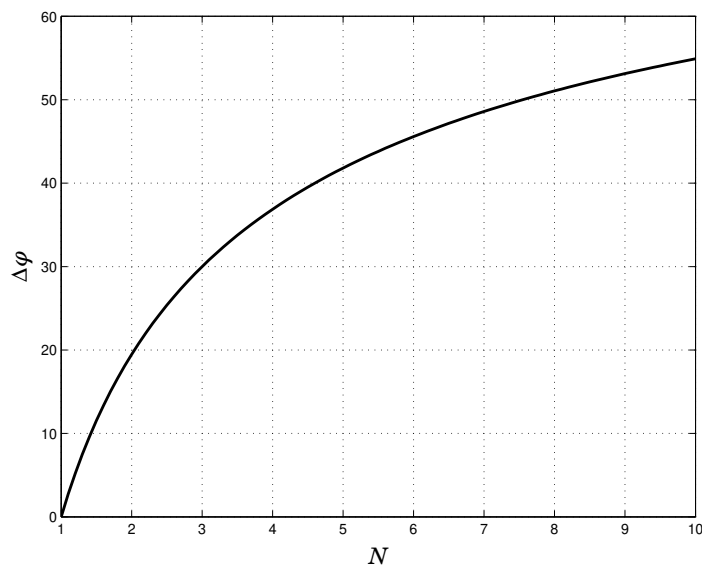
$$a = 0.1\omega_c$$

garanterar att fasmarginalen minskar högst 6°.

Fasavancerande länk

$$G_K(s) = K_K N \frac{s + b}{s + bN} = K_K \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)} \quad N > 1$$

Maximal fasökning i grader ges av diagrammet nedan:



Faskurvans topp ligger vid frekvensen

$$\omega = b\sqrt{N}$$

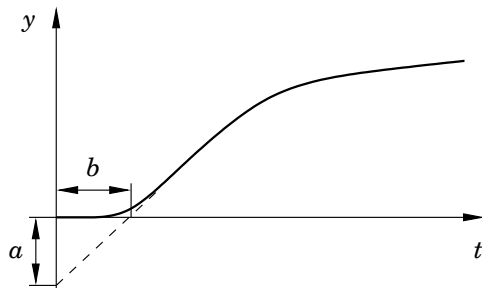
Länkens förstärkning vid denna frekvens är

$$K_K \sqrt{N}$$

Enkla inställningsmetoder för PID-regulatorn

Ziegler-Nichols stegsvansmetod

Betrakta stegsvaret hos det *öppna* systemet. En tangent dras i den punkt där stegsvaret har maximal lutning. Ur tangentens skärning med koordinataxlarna avläses sedan förstärkningen a och tiden b . PID-parametrarna beräknas därefter med hjälp av följande tabell.



Regulator	K	T_i	T_d
P	$1/a$		
PI	$0.9/a$	$3b$	
PID	$1.2/a$	$2b$	$0.5b$

Ziegler-Nichols frekvensmetod

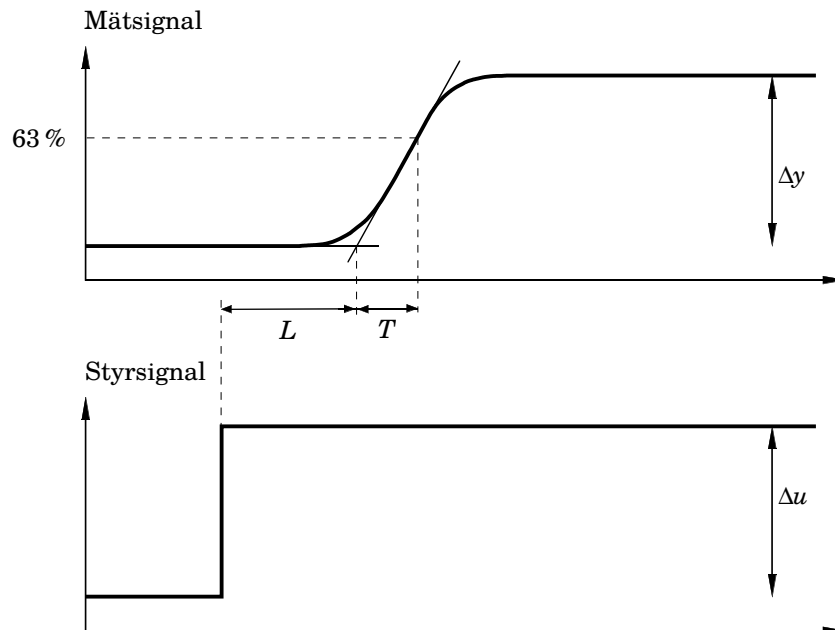
Denna metod baseras på observationer av det *slutna* systemet. Gången är följande

1. Koppla bort integral- och derivatadeln hos PID-regulatorn.
2. Justera K tills systemet självsvänger med konstant amplitud. Detta värde på K betecknas K_0 .
3. Uppmät periodtiden T_0 hos självsvängningen. De olika inställningarna på regulatorns parametrar ges av följande tabell.

Regulator	K	T_i	T_d
P	$0.5K_0$		
PI	$0.45K_0$	$T_0/1.2$	
PID	$0.6K_0$	$T_0/2$	$T_0/8$

Lambdametoden

Lambdametoden bygger på ett stegsvarsexperiment där man bestämmer processens statiska förstärkning K_p , en dödtid L och en tidskonstant T enligt följande figur



där

$$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

Regulatorparametrarna för en PI-regulator ges av:

$$K = \frac{1}{K_p} \frac{T}{L + \lambda}$$

$$T_i = T$$

Regulatorparametrarna för en PID-regulator på serie- respektive parallellform ges av:

$$K' = \frac{1}{K_p} \frac{T}{L/2 + \lambda}$$

$$K = \frac{1}{K_p} \frac{L/2 + T}{L/2 + \lambda}$$

$$T'_i = T$$

$$T_i = T + L/2$$

$$T'_d = \frac{L}{2}$$

$$T_d = \frac{TL}{L + 2T}$$